



# 2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

## 编号专用页

赛区评阅编号（由赛区组委会评阅前进行编号）：

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评阅人										
评分										
备注										

全国统一编号（由赛区组委会送交全国前编号）：

全国评阅编号（由全国组委会评阅前进行编号）：

# 创意平板折叠桌

2014年9月15日

## 摘要

在家居行业中对一个产品设计的分析是必不可少的。本文主要围绕“*rising table*”这一平板折叠桌的设计展开讨论。首先建立了桌子的几何模型，依此探究了与桌子外形相关的一系列参数之间的关系，利用明显且易得到的加工参数得到了不显知的加工参数以及桌角边缘线的刻画，并且通过对几何模型的讨论得到了桌子设计过程中的几何约束条件。通过对桌体力学模型的搭建完成了整体的定性受力分析以及桌子承重部件的定量受力分析，并分别得到了桌子稳定性的影响因素和桌子设计中的力学约束，据此写出了定量表征桌子稳定性与承重能力强弱的函数表达式。依据多目标规划方法在此基础上搭建出了兼顾稳固性、加工难易度以及用料多少的目标函数，且在MATLAB中利用此目标函数得到了实际问题的较优设计方案。随后成功将模型由原始的圆形桌面推广开来，利用推广后的模型分析得到了不同形状桌面所对应的桌体外观。最后对这一模型的准确性以及优缺点进行了分析并提出了改进方向。

关键词：木桌设计，几何模型，受力分析，多目标优化

## 1 问题重述

某公司生产一种可折叠的桌子，平铺后的桌子呈平板状。其具体设计为：桌面边缘线呈圆形，桌腿由若干根木条组成，分成两组，每组各用一根钢筋将木条连接，钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上，内侧木条则刻有空槽以保证桌腿可以立起和收平。

试建立数学模型讨论下列问题：

1. 给定长方形平板尺寸为 $120\text{cm} \times 50\text{cm} \times 3\text{cm}$ ，每根木条宽 $2.5\text{cm}$ ，连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置，折叠后桌子的高度为 $53\text{cm}$ 。试建立模型描述此折叠桌的动态变化过程，在此基础上给出此折叠桌的设计加工参数（例如，桌腿木条开槽的长度等）和桌脚边缘线的数学描述。
2. 折叠桌的设计应做到产品稳固性好、加工方便、用材最少。对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求，讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数，例如，平板尺寸、钢筋位置、开槽长度等。对于桌高 $70\text{cm}$ ，桌面直径 $80\text{cm}$ 的情形，确定最优设计加工参数。
3. 公司计划开发一种折叠桌设计软件，根据客户任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状，给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数，使得生产的折叠桌尽可能接近客户所期望的形状。你们团队的任务是帮助给出这一软件设计的数学模型，并根据所建立的模型给出几个你们自己设计的创意平板折叠桌。要求给出相应的设计加工参数，画出至少8张动态变化过程的示意图。

## 2 问题分析

题目给出了一种制造桌子的新思路，主要要我们研究平板大小、桌面形状、钢筋位置同桌子立能否被设计出来以及设计出来后的桌子形状、高矮、桌脚形状之间的关系。三个问题各有侧重：

1. 问题一是研究已经被设计出来的一种此类型桌子，在给定平板尺寸和木条宽度以及钢筋固定位置和折叠后桌子高度的情况下，要求我们从几何学角度给出桌腿木条开槽长度和桌脚边缘线的数学描述。每根木条上的开槽点必须包含桌子在折叠和平铺的整个过程中钢筋必须要滑过的地方，但是开槽过长又会导致桌子无法在相应桌高处固定，这就是开槽要合理设计的原因。因此此小题的思路应是：首先根据桌子高度计算出最外侧桌腿的支起情况，从而可推知整条钢筋的位置。而所有木条都受钢筋牵制，因此又可进一步推知内侧所有木条的位置。至此桌脚边缘线得以准确描述。再通过推演桌子在从平铺到折叠的过程中钢条必须经过各个木条的位置的总和，可以得知各个木条上的开槽长度。
2. 问题二类似于问题一的逆推，是一个设计问题。需要我们设计出符合规定的桌高和桌面直径的桌子出来。其中有隐含约束条件即能够形成桌子的条件，如：设计出的桌子的各桌腿在活动范围内不能同时处在同一位置；成型后必须是四个桌腿距离桌面的位置为最长而不能是其他桌腿（否则是其他桌腿着地）；钢槽在木条内活动范围得到足够保证，不多不少（避免有木条长度不够其折叠至指定位置），等等。以上分析还仅仅局限于纯几何学的基本分析，另外还要对桌子进行受力分析，探讨不同设计成型的桌子的稳固性，进而再从稳固性好、加工方便、用材最少等方面寻找最优设计。
3. 问题三对稳固性方面的要求有所降低，并增强了顾客对凳子设计的自主性。要求设计的数学模型可以进一步满足顾客除高度和直径外，对桌面形状和桌脚形状的不同要求。并依据此模型自行设计几个创意平板折叠桌，给出至少8张动态变化过程示意图。我们可以在模型二的基

础上做一点修改，将圆曲线改成任意曲线，再进行一些更细致的分析，并在允许范围内增加一些设计创意。

基于上述分析，我们有了大概的思路，并且为了便于描述，我们首先在此建立一个空间坐标系，这样桌子各种情形下各点的位置都能够清楚地被描述出来了。建系方法如下，如图1所示。

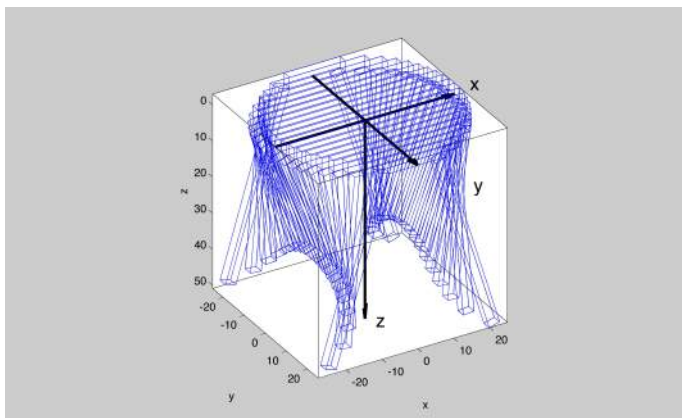


图 1：对于折叠桌建立三维正交坐标系

将桌子平放在自己面前，以桌子底面为 $xOy$ 平面，长木板底面的几何中心作为原点，桌子下折方向为 $Z$ 轴方向（同重力方向）， $x$ 轴方向与木条排列方向相同，方向水平向右， $y$ 轴与木板宽度平行，方向指向自己，整个坐标系遵循右手法则。坐标单位长度为 $1cm$ 。

### 3 模型假设

不管是运用几何学确定参数计算折叠与平铺的动态过程，还是运用材料力学结构力学分析桌子稳固性，都要对实际的桌子进行一些抽象与模型假设：

1. 桌子严格遵守轴对称和中心对称，木材厚度均一、各面平直，使得用几何图形可以完美描述桌子各部分形状。
2. 木材是均匀、连续和各向同性的，即物体是密实的、无空隙的，物体各部分（宏观）有相同的物理特性，而且在物体上同一点不同的方向上亦有相同的物理性质（例如弹性、抵抗破坏能力、热膨胀等）。
3. 木材在承重状态下形变量很小，可近似视为刚体。
4. 各个构件间的摩擦力很小，可以忽略不计。
5. 相接部分无缝相接，又不影响其活动。

### 4 符号说明

符号说明如表1所示。

$L$	折叠桌平铺状态下, 木板的长
$W$	折叠桌平铺状态下, 木板的宽
$T$	折叠桌平铺状态下, 木板的厚度
$H$	折叠桌完全折叠状态下, 桌子上表面距离水平地面的高度
$N$	桌子一侧桌腿的数目, 在第一小问中, $N = 20$
$i$	桌子一侧的每一个桌腿依次编号( $i = 1, 2, \dots, N$ )
$p_i$	编号为 $i$ 桌腿的铰链处距离 $y$ 轴的距离
$d_i$	编号为 $i$ 的桌腿的长度
$\theta_i$	编号为 $i$ 的桌脚折叠过程中与 $xOy$ 平面所张成的夹角
$\theta_{i,final}$	编号为 $i$ 的桌脚在折叠桌处于完全折叠状态下时与 $xOy$ 平面所张成的夹角
$x_{i,final}$	折叠桌完全折叠状态下, 编号为 $i$ 的木条末端 $x$ 坐标
$z_{i,final}$	折叠桌完全折叠状态下, 编号为 $i$ 的木条末端 $z$ 坐标
$z_{i,final}$	折叠桌完全折叠状态下, 编号为 $i$ 的木条末端 $z$ 坐标
$x_i(\theta_1)$	在第一根木条下折 $\theta_1$ 时, 编号为 $i$ 的木条末端 $x$ 坐标
$y_i(\theta_1)$	在第一根木条下折 $\theta_1$ 时, 编号为 $i$ 的木条末端 $y$ 坐标
$z_i(\theta_1)$	在第一根木条下折 $\theta_1$ 时, 编号为 $i$ 的木条末端 $z$ 坐标
$\rho_i(\theta_1)$	在第一根木条下折 $\theta_1$ 时, 编号为 $i$ 的木条的顶端到钢筋所在处的距离
$G$	桌子自身重量
$G'$	单根支撑木条的重量
$P$	桌子上所负担的载荷
$S$	地面对任意支撑木条的支持力
$F$	钢筋对支撑木条所施加的力
$T'$	钢丝对中央短木条的拉力
$r$	钢筋半径
$r'$	钢丝半径
$\rho$	木材的密度
$g$	重力加速度
$\sigma$	支撑木条内部的正应力
$\sigma_1$	支撑木条内用于克服外力矩的正应力分量
$\sigma_2$	支撑木条内用于克服压力的正应力分量
$\sigma'$	中央短木条内部的剪应力
$\sigma_{sw}$	木材顺纹抗压强度
$\sigma_{pw}$	木材横纹抗剪强度
$\sigma_i$	钢丝抗拉强度
$K$	工程结构设计中反映安全程度的安全系数

表 1: 符号说明

## 5 模型构建与问题求解

### 5.1 问题一：已知设计求桌脚边缘线和开槽长度

#### 5.1.1 各参数的数学符号设定

设定木板长度用 $L$ 表示，宽用 $W$ 表示，厚用 $T$ 表示，每侧的木条数用 $N$ 表示，桌子的高度用 $H$ 表示。考虑到加工方便，设定每根木条的宽度一样，故而每根木条的宽度 $w = \frac{W}{N}$ 。对于一侧的木条，将其从前到后顺序编号 $1, 2, \dots, N$ ，不同编号的木条长为 $d_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 。以木条折叠口作为木条头部（顶端），桌脚部位为木条尾部（末端），编号为 $i$ 的木条顶端 $x$ 轴坐标记为 $p_i$ ，易知， $p_i + d_i = \frac{L}{2}$ 。钢筋固定在最外侧木条上，记其到最外侧木条尾部的距离为 $D$ 。

再考虑桌子折叠过程需要用到的参数。用 $\theta_i$ 表示桌子下折过程中不同木条下折的角度，即编号为 $i$ 的木条与 $xOy$ 平面的夹角。用 $\theta_{i,final}$ 表示编号为 $i$ 的木条允许下折的最大角度（即与 $xOy$ 平面的最大夹角），用 $(y_{i,final}, y_{i,final}, z_{i,final})$ 表示折叠桌在完全折叠状态下，编号为 $i$ 的木条尾部的下沿中点坐标，并且以此作为刻画边缘线的坐标参数。以 $\rho_i(\theta_1)$ 表示最外侧木条下折 $\theta_1$ 角度时钢筋位置到编号为 $i$ 的木条顶端的距离， $\rho_i(\theta_1)$ 的大小随着 $\theta_1$ 的变化而变化。则开槽长度 $l_i$ 可以通过钢筋在整个移动过程中钢筋到木条顶端的最大距离减去钢筋到木条顶端的最短距离得到。

#### 5.1.2 模型的构建与求解

通过已经进行过的模型假设和坐标系构建，木桌转化成为一个可折叠的纯几何模型，并且几何点之间的相对位置均可以通过坐标之间的关系来刻画。接下来运用解析几何知识即可完全获悉桌子折叠的全部过程。问题也相应的得到了解决。

由于木板的左侧和右侧是对称的，我们不妨只关注右侧部分。右侧圆桌表面虽然呈锯齿形，但圆桌折叠起来后的桌面可近似由直径为木板的宽的圆刻画。圆心即为长板对称中心。根据假设，各根木条的宽度一致。考虑到该问题没有给出各木条的裁剪长度，我们让每根木条的顶端中点位于该几何圆的圆周上，这样木板的裁剪就唯一确定了。

为了求解出各根木条的开槽长度，首先我们可以写出 $\rho_i(\theta_1)$ 的表达式。迎着 $y$ 轴方向看去，我们可以得到一个二维平面图，在图中第一根木条顶端、第 $i$ 根木条顶端和钢筋位置三个坐标组成一个三角形，由余弦定理可知， $\rho_i(\theta_1)$ 与 $\theta_1$ 之间的关系为：

$$\rho_i(\theta_1)^2 = (d_1 - D)^2 + (p_i - p_1)^2 - 2(d_i - D)(p_i - p_1) \cos \theta_1 \quad (1)$$

由(1)式可以看出，因为各括号内的值均为正，而 $\theta_1$ 的最大值在任何桌子的设计中都不可能超过 $\frac{\pi}{2}$ ，所以随着 $\theta_1$ 的增大， $\rho_i(\theta_1)$ 是增大的。据此可以得出编号为 $i$ 的木条的开槽长度为：

$$l_i = \sqrt{(d_1 - D)^2 + (p_i - p_1)^2 - 2(d_i - D)(p_i - p_1) \cos \theta_{1,final}} - d_i + D \quad (2)$$

在该问题中，

$$y_i = 0.5W - (0.5 - i)w \quad (3)$$

从而可得

$$p_i = \sqrt{(0.5W)^2 - y_i^2} \quad (4)$$

题目要求开槽长度，由上分析知，我们需要知道 $\theta_1$ 的取值范围，它与桌子高度有关：

$$\theta_{1,final} = \arcsin \frac{H - T}{d_1} \quad (5)$$

$$l_i = \sqrt{(d_1 - D)^2 + (p_i - p_1)^2 - 2(d_i - D)(p_i - p_1) \cos \theta_{1,final}} - d_i + D \quad (6)$$

对于桌脚边缘线，选定的参数 $x_i, y_i, z_i$ 满足关系：

$$\begin{cases} x_i = p_i + d_i \cos \theta_{i,final} \\ y_i = 0.5W - w(0.5 - i) \\ z_i = d_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (7)$$

其中，

$$d_i = 0.5L - p_i \quad (8)$$

$$\theta_{i,final} = \arctan \frac{(d_1 - D) \sin \theta_1}{(d_1 - D) \cos \theta_1 - p_i + p_1} \quad (9)$$

将 $L = 120, W = 50, T = 3, H = 53, w = 2.5, N = \frac{W}{w} = 20, D = \frac{d_1}{2}$ 代入，开槽长度和桌脚边缘线最终都可以由上述式子确定，通过计算机编程后，可以得到以下计算结果。

对于桌腿开槽，其最终具体开槽信息如表2所示。其中开槽起点位置和开槽终点位置分别使用木条平摊时槽两端的x轴坐标来表示。各个桌脚开槽的示意图如图2所示。

木条编号	开槽起点位置 (cm)	开槽终点位置 (cm)	开槽长度 (cm)
1	33.9031	33.9031	0
2	38.2596	33.9031	4.3564
3	41.5668	33.9031	7.6637
4	44.2715	33.9031	10.3684
5	46.4957	33.9031	12.5926
6	48.2961	33.9031	14.393
7	49.7062	33.9031	15.8031
8	50.7476	33.9031	16.8445
9	51.4346	33.9031	17.5314
10	51.7759	33.9031	17.8728
11	51.7759	33.9031	17.8728
12	51.4346	33.9031	17.5314
13	50.7476	33.9031	16.8445
14	49.7062	33.9031	15.8031
15	48.2961	33.9031	14.393
16	46.4957	33.9031	12.5926
17	44.2715	33.9031	10.3684
18	41.5668	33.9031	7.6637
19	38.2596	33.9031	4.3564
20	33.9031	33.9031	0

表 2: 各条桌腿开槽参数

桌子折叠的动态变化过程由图3所示。为简明直观起见，我们只画出了一侧的桌腿以示说明桌子展开的动态过程。桌子达到预期折叠高度 $H$ 的时候， $\theta_{1,final} = 73.3292 \text{ deg}$ ，其桌腿的形态如图4所示，其上红色的线条为得出的桌脚边缘线的轮廓。整个桌子的形态如图5所示。



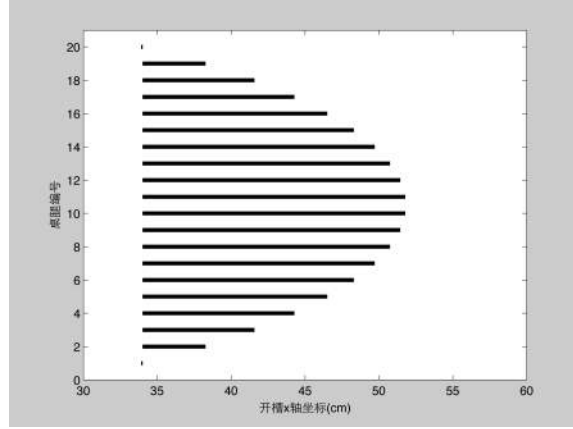


图 2: 各个桌脚的开槽示意图

## 5.2 问题二：对任意的桌高和桌面圆直径，在平板材料上设计加工

### 5.2.1 几何学上的分析

将问题划分成两部分，首先忽略力学上的关系，单纯从纯几何的角度设计该折叠桌。先分析几何上的限制条件，再在之后的部分去添加其他的考虑因素。

基于第一问的分析，我们已经大致清楚了描述桌子的特征各个参量之间的关系。现在将它们之间的关系简明地罗列于下，由于桌子具有轴对称性和中心对称性，我们只需要考察右半侧即可：

1. 平板的宽度 $W$ 即桌面的直径；木条的宽度同直径与同侧的木条数目 $N$ 相关：

$$w = \frac{W}{N} \quad (10)$$

2. 编号为 $i$ 的木条的活动平面的 $y$ 坐标值与编号有关，木条顶端在 $x$ 轴上的坐标值 $p_i$ 与桌面要求形状（圆形）和木条编号有关，其长度 $d_i$ 与木板总长 $L$ 和 $p_i$ 有关：

$$y_i = 0.5W - (0.5 - i)w \quad (11)$$

$$p_i = \sqrt{(0.5W)^2 - y_i^2} \quad (12)$$

$$d_i = 0.5L - p_i \quad (13)$$

3.  $\theta_{1,final}$ 与桌子成型后的高度相关：

$$\theta_{1,final} = \arcsin \frac{H - T}{d_1} \quad (14)$$

4.  $\theta_i$ 由 $\theta_1$ 和 $D$ 决定；相应地， $\theta_{i,final}$ 也由 $\theta_{1,final}$ 和 $D$ 决定。其中 $D$ 表征钢筋相对于桌腿的位置。

$$\theta_i = \arctan \frac{(d_1 - D) \sin \theta_1}{(d_1 - D) \cos \theta_1 - p_i + p_1} \quad (15)$$

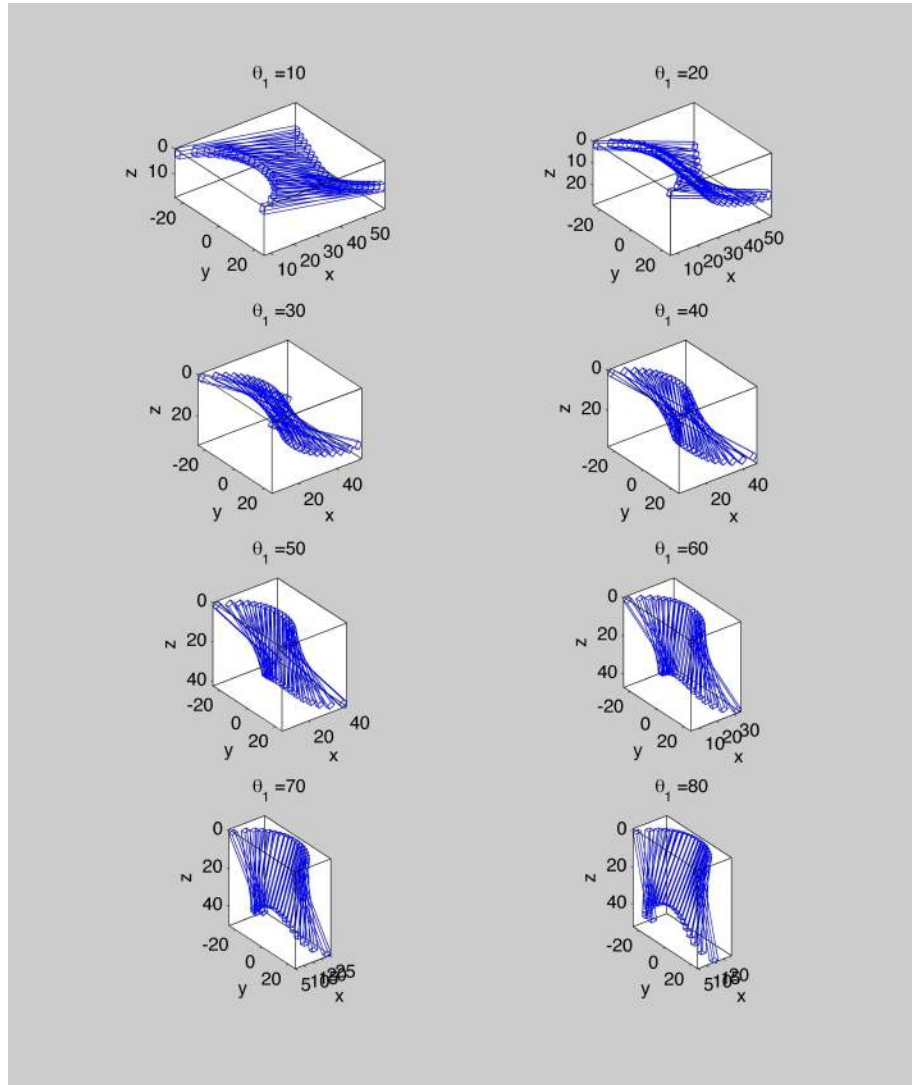


图 3：桌子折叠的动态变化过程

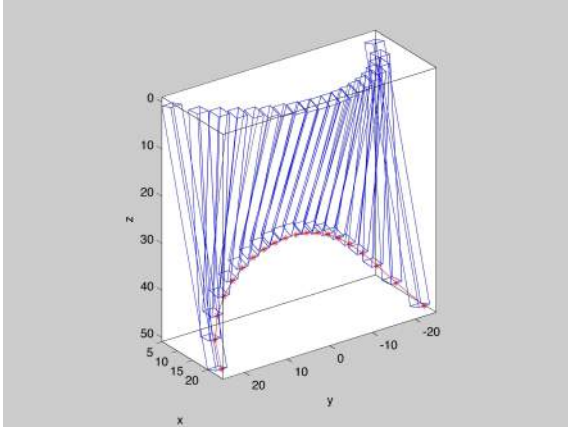


图 4: 桌子处于折叠完全状态下的一侧桌腿分布图以及桌脚边缘线轮廓

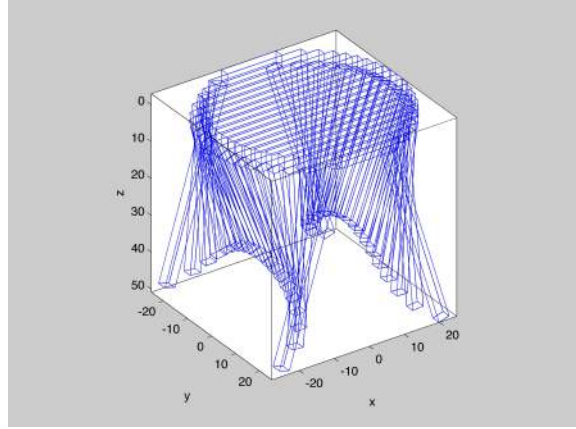


图 5: 桌腿处于完全状态下的状态图

$$\theta_{i,final} = \arctan \frac{(d_1 - D) \sin \theta_{1,final}}{(d_1 - D) \cos \theta_{1,final} - p_i + p_1} \quad (16)$$

(注释: 该等式来源于钢筋的约束, 钢筋不变形, 整根都在同一水平面上)

5. 桌脚位置与对应的木条长度、 $p_i$ 和 $\theta_{i,final}$ 有关:

$$\begin{cases} x_i = P_i + d_i \cos \theta_{i,final} \\ y_i = 0.5W - w(0.5 - i) \\ z_i = d_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (17)$$

6. 桌槽长度 $l_i$ 又可表示为:

$$l_i = \sqrt{(d_1 - D)^2 + (p_i - p_1)^2 - 2(d_i - D)(p_i - p_1) \cos \theta_{1,final}} - d_i + D \quad (18)$$

其实在上述各参量中, 当顾客给定了直径 $W$ 和高度 $H$ , 再选取适当的木条宽度, 所有参量并非全部确定, 这时各参量其实是随着 $L$ 和 $D$ 变化的。而木条宽度只对桌面形状的近似度和桌脚边缘线的描述有细微影响, 本部分中不做细致讨论。

事实上, 以上的代数关系还没有加上几何约束限制。下面考虑几何体的自然约束限制。

1. 要使得最外侧的四个桌脚能够着地, 必须满足 $z_{1,final}$ 是所有 $z_{i,final}$ 里最大的, 这个因素不加考虑的话, 确实会出现四个桌脚不能着地, 着地的反而是内侧的某些木条的情况。如图6就给出了这种奇异现象。要设计出直径为50cm高为53cm的木桌, 图中所描述的方案是一个长 $L = 200cm$ , 钢筋位置 $D = 46.0969cm$ , 木条宽度 $w = 2.5cm$ 的设计。结果出现了设定为桌脚的木条不能着地的情况。

要避免该情况, 约束条件可表示为:

$$z_{i,final} \leq z_{1,final} \quad (19)$$

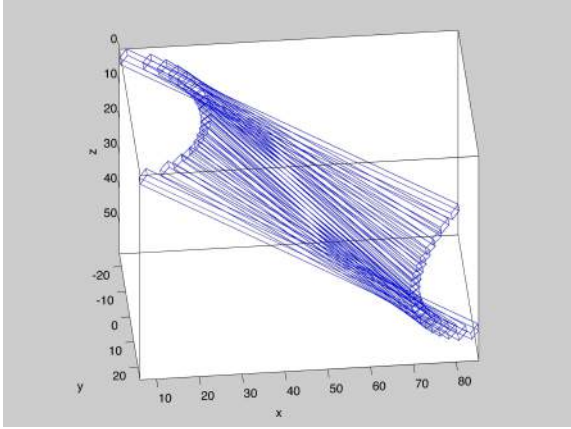


图 6: 最外侧四个桌脚不能着地

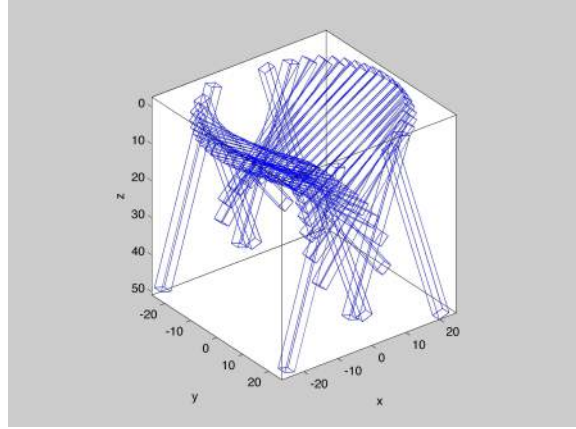


图 7: 中间的木条相交

2. 最外侧的桌脚长度要能够保证达到满足桌子高度的最低要求, 这个不难想象:

$$H - T \leq d_1 \quad (20)$$

3. 中间的木条不能相交, 否则根本不能成形。图7中就给出了这种错误情况, 图中桌子的参数为:  $L = 120cm, D = 43.4948cm, w = 2.5cm, H = 53cm, W = 50cm$ 。

要避免该情况, 考虑到桌子左半侧与右半侧关于  $y$  轴对称, 该约束条件可表示为:

$$x_{i,final} \geq 0 \quad (21)$$

4. 在桌子成型的时候, 钢筋必须能够穿过每个木条。图8给出的又是一种计算出来了但是几何上不可能的情况, 图中的黑色粗线表示钢筋位置。图中桌子的参数为:  $L = 100cm, D = 8.6990cm, w = 2.5cm, H = 53cm, W = 50cm$

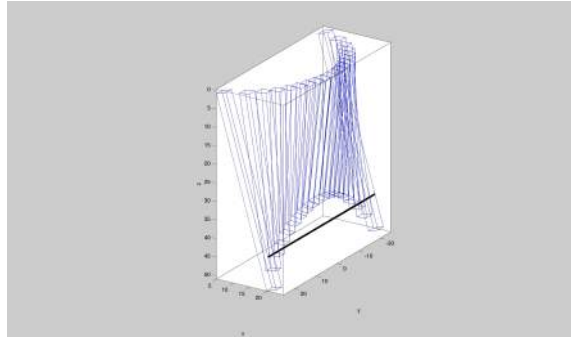


图 8: 钢筋不能穿过中间的木条

要避免该情况, 又需要添加约束条件:

$$\begin{cases} (d_1 - D) \sin \theta_1 \leq d_i \sin \theta_i \\ d_i > D \end{cases} \quad (22)$$

上述约束条件比较复杂，无法分离出自变数 $T, L, D$ 得到简单的不等关系。鉴于此，我们利用MATLAB程序使用打靶法找到这个可行域。

## 5.2.2 力学上的分析

(修正说明：在经过仔细地受力分析之后，我们肯定折叠桌在仅有本题所给的附件视频所展示的构件而不存在其他用于固定的结构的情况下是无法直立的，桌子的自重完全可以使折叠桌重又收起，变回平板。后来我们在 $youtube$ 上找到了与该折叠桌相关的另一个视频，那个视频说明了在桌子中央短木条的末端系有一根钢丝绳，设计师在桌子折叠成型后将钢丝绳的另一端挂在了桌面的背部从而使得桌子的结构得以固定。我们接下来的受力分析均从该视频所展现的结构出发。)

桌子的设计不光是一个纯几何学问题，还要考虑力学因素。可以从两个方面来考虑桌子的力学性质，即稳定性与承重能力。以下将分别由这两个方面入手对进行分析。

### 1. 桌子稳定性因素

根据查找的资料，桌子的稳定性的考量有两个测试标准， $BS4875-5:2001$ 和 $BSEN581-3:1999$ 。测试 $BS4875-5:2001$ 是用45kg重的摆锤以摆动高度为35cm的方式冲击桌面边缘，检查桌面是否翻倒。测试 $BSEN581-3:1999$ 的内容是在桌子边缘100mm位置施加垂直载荷 $F$ 。 $F$ 在200N到400N之间，检查桌子是否翻倒。这两种测试有助于我们思考稳定性的表现。即木材够重以不致被轻易掀翻，同时桌子不能因为单边受压而轻易侧翻。对于此题，我们主要对第二种稳定性进行定性分析。如图9所示，如果桌脚所张面积过小，则在桌面边缘施加压力时将以桌角为支点产生较大的力矩。若施加的压力所产生的力矩最终超过重力产生的力矩，桌子就会发生侧翻。

基于以上分析，我们采用 $\frac{S_{桌脚}}{S_{桌面}}$ 来刻画稳定性因素，若桌面高度与形状大小均给定，则桌脚所围成的面积越大，桌脚撑得越开，桌子越不易翻倒。

### 2. 木条承重能力

由材料力学的相关知识可知，任何材料所能承受的应力是有一定的限度的，若材料内的应力超出材料本身所允许的范围，材料就会发生不可逆的形变，甚至最终断裂毁坏。因此若成型后的桌子的承重能力不足，在放置较重的物品时桌子就会产生破损，桌子的设计相应也就不成功。故而在设计桌子时必定要提前对桌子成型后承重进行受力分析，保证作品最后的实用性。

现将受力分析呈现如下：

在接下来的分析里，为方便起见，将 $\theta_{i,final}$ 统一用 $\theta_i$ 表示。且在接下来的分析中出现的下标为 $i$ 的参量均对应中央的短木条。同时首先我们仅对桌面轮廓为圆形的情况进行分析。为了方便起见，同时不失一般性，在接下来的分析中我们假设承重钢丝一头挂于中间最短木条的最末端，另一头连接在桌面的中心处。图10是桌子完全打开后的部分结构侧面示意图。其中绿色为中央短木条，蓝色为外侧接地的长木条，橘黄色表示短木条的开槽部分，红色细线即表示固定所用的钢丝。

下面考虑单一木条的受力情况。不考虑摩擦力或木条间的挤压，由于除了中央短木条和四根用于支撑的长木条之外，其它木条的位置仅受桌面和钢筋的约束。因此若钢筋对木条施以垂直于木条的力木条就会发生旋转。另外由于槽的存在，钢筋在沿木条向上的方向对木条无法施力。因此可以判断这些木条均不具有承重的功能，在以下的受力分析中我们仅对中央短木条以及外侧支撑木条的受力情况进行分析。

图12表示外侧支撑木条的受力情况。由于整个桌子的自重以及载荷的重量均由四根木条承受，因此每根木条受到 $S = (G + P)/4$ 的竖直向上的地面支持力，其中 $G$ 为桌子自重， $P$ 为桌上的载荷重量。此外，支撑木条还受到钢筋的作用力。考虑到忽视其他木条的作用后，钢筋仅受到中央短木条

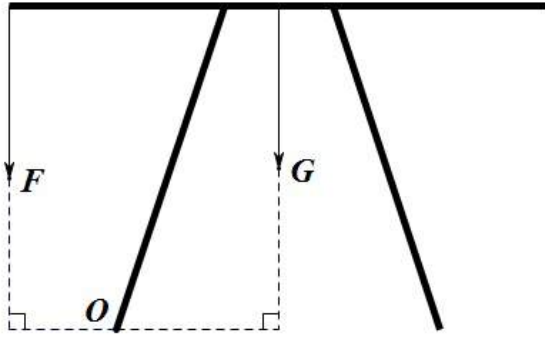


图 9: 侧翻受力示意图

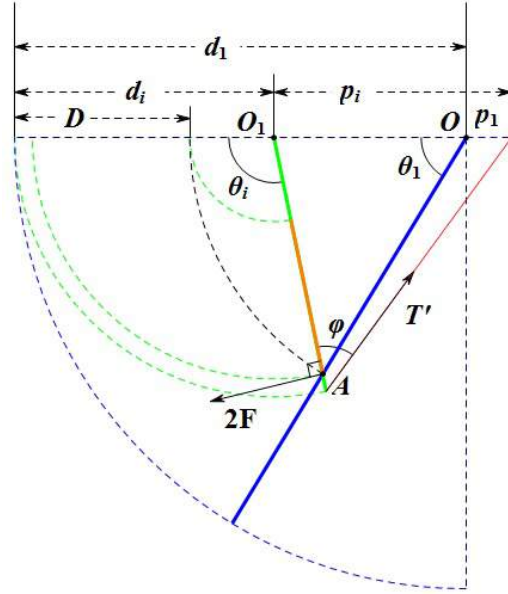


图 10: 折叠状态侧面示意图

以及支撑木条的作用力，如图11所示。为了保证钢筋不发生翻转或平移，三个力必须在同一平面内且有  $F_1 = F_2 = F_3/2 = F$ 。在不考虑钢筋和短木条的摩擦的前提下，三力所在平面显然与短木条垂直， $F$ 的方向如图12所示。以0点为支点，根据力矩平衡方程可以得到

$$S \cos \theta_1 d_1 = F \cos(\theta_i - \theta_1)(d_1 - D) \quad (23)$$

其中为了便于后续运算忽略了支撑木条本身的重力项，由于该项很小，故对结果无明显影响。解得

$$F = (G + P) \cos \theta_1 \frac{d_1}{4} \cos(\theta_i - \theta_1)(d_1 - D) \quad (24)$$

因此，中央短木条受到钢筋所施加的 $2F$ 的力，方向垂直木条向左。此外短木条还受到钢筋所施加的沿钢筋向右的拉力 $T'$ ，如图10所示。由于单根木条的重力远小于 $F$ 以及 $T'$ ，在此忽略不计。由正弦定理和余弦定理

$$\overline{O_1A} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_i} (d_1 - D) \quad (25)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_i \sin \theta_i}{\sqrt{p_i^2 + d_i^2 + p_i d_i \cos \theta_i}} \quad (26)$$

再由中央木条的力矩平衡方程可得

$$T' = \frac{(G + P) \cos \theta_1 d_1 \sin \theta_1 \sqrt{p_i^2 + d_i^2 + p_i d_i \cos \theta_i}}{2 \cos(\theta_i - \theta_1) \sin^2 \theta_i d_i p_i} \quad (27)$$

下面开始分析折叠桌各个部分的承重上限。对于支撑木条，由于钢筋处木材实际内部受力情况复杂在此不予详细分析，而将其简化为一个剪力与一个正压力的合力。木条受到垂直于木条的剪

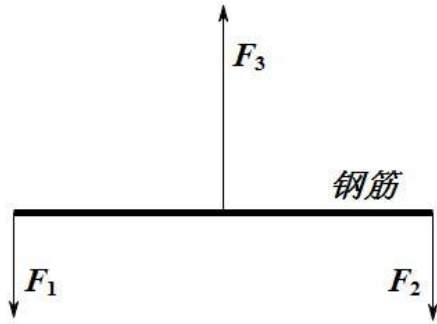


图 11: 钢筋受力示意图

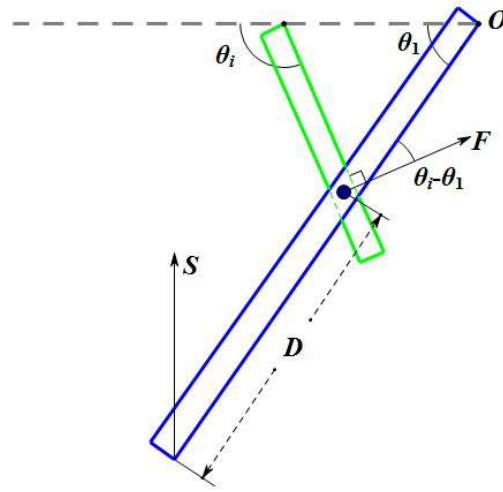


图 12: 支撑木条受力示意图

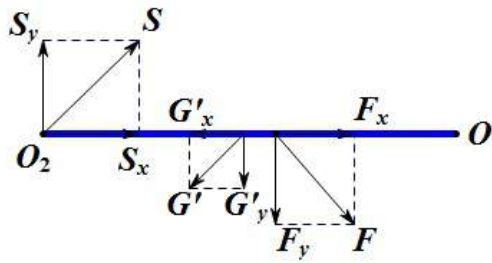


图 13: 支撑木条受力图

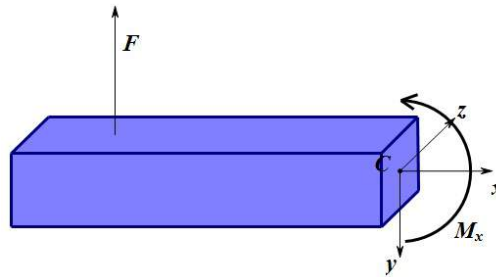


图 14: 支撑木条内部弯矩示意图

力 $S_y$ 、 $F_y$ 、 $G'_y$ 与沿木条方向的压力 $S_x$ 、 $F_x$ 、 $G'_x$ ，如图13所示。其中以木条下端 $O_2$ 为原点，木条方向为 $x$ 轴方向建立坐标系， $y$ 轴垂直于木条且与外力在同一平面内。根据材料力学知识，对于位于 $x$ 处的横截面，木材内部一定存在弯矩 $M_x$ 与绕横截面形心的外力矩平衡，如图13。因此有

$$M_x = \begin{cases} -S_y x + \frac{G'_y x^2}{2d_1} & (x < D) \\ -S_y x + F_y(x - D) + \frac{G'_y x^2}{2d_1} & (x > D) \end{cases} \quad (28)$$

对于矩形横截面 $A$ ，木材内部的正应力仅与 $y$ 有关，满足

$$\sigma_1 = \frac{yM_x}{\iint y^2 dA} \quad (29)$$

再考虑到作用于木条方向的外力对木条内部正应力的影响

$$\sigma_2 = \begin{cases} \frac{S_x}{wT} - \frac{G'_x x}{d_1 wT} & (x < D) \\ \frac{S_x + F_y}{wT} - \frac{G'_x x}{d_1 wT} & (x > D) \end{cases} \quad (30)$$

木条内任意一点的总正应力 $\sigma$ 为 $\sigma_1$ 与 $\sigma_2$ 的代数和。通过计算可以发现对于任意参数，当 $x = D$ ， $y = -T/2$ 时 $\sigma$ 总为最大值，即该点的正应力最大。此时有

$$\sigma = \frac{3(G + P)}{2} - \frac{wTgD}{2} D \cos \theta_1 + \frac{(G + P) \sin \theta_1}{4wT} - \frac{Dg}{d_1} \quad (31)$$

显然，若要使支撑木条不变形折断，则 $\sigma$ 应小于许用应力。即

$$\sigma < \left[ \frac{\sigma_{sw}}{K} \right] \quad (32)$$

其中 $\sigma_{sw}$ 为木材的顺纹抗压强度， $K$ 为安全系数，中括号表示标准值。

现在考虑钢筋与木条接触处的受力情况。通过查阅钢筋与木材的各类强度数据并进行对比我们发现在钢筋的承重能力远大于三根木条，因此我们仅需确定木条的承重范围而无需担心钢筋折断。另一方面，观察图11，由于中间短木条所受的钢筋压力为支撑木条的两倍，因此理论上中间木条更易折断。故分析中间短木条的受力情况足以确定整个结构的承重范围。

由于钢筋对中间木条的力为剪力，且仅作用于槽的一边，因此仅需要对受力的这一边进行分析。易知木条内部的剪应力为

$$\sigma' = \frac{2F}{w(T - 2r)} = \frac{(G + P) \cos \theta_1 d_1}{2w(T - 2r) \cos(\theta_i - \theta_1)(d_1 - D)} \quad (33)$$

其中 $r$ 为钢筋的半径。为保证木料不发生剪切形变， $\sigma'$ 应满足

$$\sigma' < \left[ \frac{\sigma_{pw}}{K} \right] \quad (34)$$

其中 $\sigma_{pw}$ 表示木材的横纹抗剪强度。除此之外，为了保证在使用过程中钢丝不会崩断， $T'$ 应满足

$$\frac{T'}{\pi r'^2} = \frac{(G + P) \cos \theta_1 d_1 \sin \theta_1 \sqrt{p_i^2 + d_i^2 + p_i d_i \cos \theta_i}}{2 \cos(\theta_i - \theta_1) \sin^2 \theta_i d_i p_i \pi r'^2} < \left[ \frac{\sigma_i}{K} \right] \quad (35)$$



其中 $r'$ 为承重钢丝的半径， $\sigma_i$ 为钢丝的抗拉强度。由于铰接器件的受力情况复杂，且不同的器件承重能力差别很大，所以在受力分析过程中我们并没有考虑各种铰接处的受力情况以及承重能力。事实上这种简化是合理的，在现实生活中我们也可以通过加固铰接处来使其获得良好的承重能力。综上所述，为了确保桌子具有一定的承重能力，折叠桌的参数需要受到以下约束条件的限制

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3(G+P)}{2} - \frac{wT\rho gD}{2} D \cos \theta_1 + \frac{(G+P) \sin \theta_1}{4wT} - \frac{D\rho g}{d_1} < \left[ \frac{\sigma_{sw}}{K} \right] \\ \frac{wT^2}{(G+P) \cos \theta_1 d_1} < \left[ \frac{\sigma_{pw}}{K} \right] \\ \frac{2w(T-2r) \cos(\theta_i - \theta_1)(d_1 - D)}{(G+P) \cos \theta_1 d_1 \sin \theta_1 \sqrt{p_i^2 + d_i^2} + p_i d_i \cos \theta_i} < \left[ \frac{\sigma_i}{K} \right] \\ \frac{2 \cos(\theta_i - \theta_1) \sin^2 \theta_i d_i p_i \pi r'^2}{(G+P) \cos \theta_1 d_1 \sin \theta_1 \sqrt{p_i^2 + d_i^2} + p_i d_i \cos \theta_i} < \left[ \frac{\sigma_i}{K} \right] \end{array} \right. \quad (36)$$

以上的分析实际上仅在 $N$ 为奇数时成立，因为当 $N$ 为偶数时，桌子中央是两根长度相同的木条而非一根。但是可以通过简单的证明来说明把钢丝绳挂在其中任意一根木条上，其力学效果与 $N$ 为奇数时几乎完全一致，因此在此不做过多赘述。通过查询《中国林木测试管理办法》以及网上各商家所提供的产品参数，我们最终将 $\sigma_{sw}$ 定为 $45MPa$ ， $\sigma_{pw}$ 定为 $9MPa$ ， $\sigma_i$ 定为 $1700MPa$ ， $K$ 定为 $5$ ， $r$ 与 $r'$ 分别定为 $0.5cm$ 和 $0.1cm$ ， $P$ 为 $1000N$ 。通过粗略的计算，我们发现由于 $\sigma_i$ 的值很大，因此第三个限制条件远没有第一和第二强，在接下来的分析中可以仅对第一与第二个限制条件进行分析。

另外，实际上承重性能并非一个约束条件。在满足基本承重要求的基础上桌子的承重性能越好其实用性也就越强。因此我们最终选择将桌子的承重能力用 $\left(\frac{[\frac{\sigma_{pw}}{K}] - \sigma'}{[\frac{\sigma_{pw}}{K}]}\right)^{\alpha_3}$ 和 $\left(\frac{[\frac{\sigma_{sw}}{K}] - \sigma}{[\frac{\sigma_{sw}}{K}]}\right)^{\alpha_4}$ 表示，

其中 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 均为正数。在每一项均大于0的基础上，该表达式所得出的值越大，说明桌子的承重能力越强。

### 5.2.3 最优化设计与分析

对于给定的桌高和桌面大小，要求给出一个最优设计。这属于多目标规划问题。

题目中给定了桌面的大小 $W$ 和桌子的高度 $H$ ，一旦我们确定折叠桌完全展开状态下的木板长度 $L$ 和木板厚度 $T$ ，以及钢筋穿过木条的位置 $D$ 就可以完全确定桌子的形态。因此此问题转化为了找到满足给定 $W$ 和 $H$ 条件，找到使得目标函数取值最大的 $T, L, D$ 。

下面考虑目标函数的构建。最优设计需要综合考虑用料多少、木桌稳定性、承重能力以及制作工艺的复杂程度这几个方面。厂家希望用料少、制作工艺少，同时又不能太损害木桌的稳定性和承重能力，故而我们需要找到描述这几个因素好坏程度的数学刻画，并加上不同的权重因子，给出一种优化方向。

将各个因素综合纳入优化函数 $\mathcal{F}(T, L, D)$ 的表达式中，使得改变 $T, L, D$ 得到不同的函数值，其中函数值越大，代表四项要求综合起来满足得越好，该题目的四项要求不可能全部得到最大满足，因而该题目只能得到弱有效解，得到的最优结果与设定的各个考量因素的权重有关。下面分别从这四个方面考虑，来说明目标函数的选取依据。

#### 1. 制作工艺的复杂程度

希望设计出的桌子在工艺上简单一些，最简单的表述就是在木板上刻木条的次数少一些， $N$ 小了，为了割出木条而需要的走刀次数走刀总长度都减少了，同时用于连接桌面与木条的转轴轴承也少了。这个反映在函数 $F$ 上是 $\left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha_1}$ ，其中 $\alpha_1$ 刻画了这个因素所占的权重比。

## 2. 加工原料的成本

希望设计的桌子用料最省。在选定木材种类（性能和市场价格一定）的情况下，用料总量为  $L \times W \times T$ ，故而该项因素的目标优化方向在函数中反映为  $(\frac{1}{L \times W \times T})^{\alpha_2}$ ，其中  $\alpha_2$  刻画了这个因素所占的权重比。

## 3. 桌子的承重能力

希望设计的桌子足够结实。根据之前进行过的力学分析，我们可以得到，最中间的木条的稳固性的数学刻画为

$$\frac{[\frac{\sigma_{pw}}{K}] - \sigma'}{[\frac{\sigma_{pw}}{K}]}$$

最外侧的木条的稳固性的数学刻画为

$$\frac{[\frac{\sigma_{sw}}{K}] - \sigma}{[\frac{\sigma_{sw}}{K}]}$$

故而木桌的结实程度反映在函数  $F$  上为

$$\left(\frac{[\frac{\sigma_{pw}}{K}] - \sigma'}{[\frac{\sigma_{pw}}{K}]}\right)^{\alpha_3} \left(\frac{[\frac{\sigma_{sw}}{K}] - \sigma}{[\frac{\sigma_{sw}}{K}]}\right)^{\alpha_4}$$

其中  $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  刻画的是变量对函数值的贡献度。

## 4. 桌子的稳定性

希望设计出来的桌子稳定性好，不轻易倾倒。通过5.2.2小节分析，我们知道它最终反映在函数  $\mathcal{F}$  上为  $(\frac{S_{桌脚}}{S_{桌面}})^{\alpha_5}$ ，其中  $\alpha_5$  刻画的是变量对函数值的贡献度。

最终，优化目标函数的表达式为：

$$\mathcal{F}(T, L, D) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{1}{L * W * T}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{[\frac{\sigma_{pw}}{K}] - \sigma'}{[\frac{\sigma_{pw}}{K}]}\right)^{\alpha_3} \left(\frac{[\frac{\sigma_{sw}}{K}] - \sigma}{[\frac{\sigma_{sw}}{K}]}\right)^{\alpha_4} \left(\frac{S_{桌脚}}{S_{桌面}}\right)^{\alpha_5} \quad (37)$$

根据经验，我们设定各权重因子分别为： $\alpha_1 = 1$ ， $\alpha_2 = \frac{3}{2}$ ， $\alpha_3 = \frac{3}{2}$ ， $\alpha_4 = \frac{1}{2}$ ， $\alpha_5 = 1$ ，之后我们可以由优化目标函数得到给定桌高和直径的木材其他参数  $L, T, D$ ，并可非常容易地由这几个量得到开槽长度。另外，若将  $\mathcal{F}(T, L, D)$  的具体表达式展开，会发现该函数的取值与  $N$  的大小呈负相关性， $N$  越小所得的  $\mathcal{F}$  就越大。这样会导致函数图像塌陷。在实际的应用中根据具体情况，为了保证桌面形状能够被较为精细地刻画， $N$  的取值会存在一个下限从而避免了这种情况的发生。

## 5.2.4 问题二的求解

对于给定的桌面高度  $H$  和桌面直径  $W$ ，利用计算机程序可以得出  $(T, L, D)$  受几何约束之后的可行域以及可行域内目标函数  $\mathcal{F}(T, L, D)$  的值。由程序找出使得目标函数取最大值的  $(T, L, D)$  就可认为是我们需要找到的最优解。

对于题中特定情况的求解过程如下。

题中给定桌面高度 $H = 70\text{cm}$ ，桌面直径 $W = 80\text{cm}$ 。我们在 $(T, L, D)$ 空间中找到的几何可行区域如图15所示。为了直观以及便于观察，我们已将可行域内点密度降低并且对于每一个点按照其相应目标函数 $\mathcal{F}(T, L, D)$ 的取值对其着色。

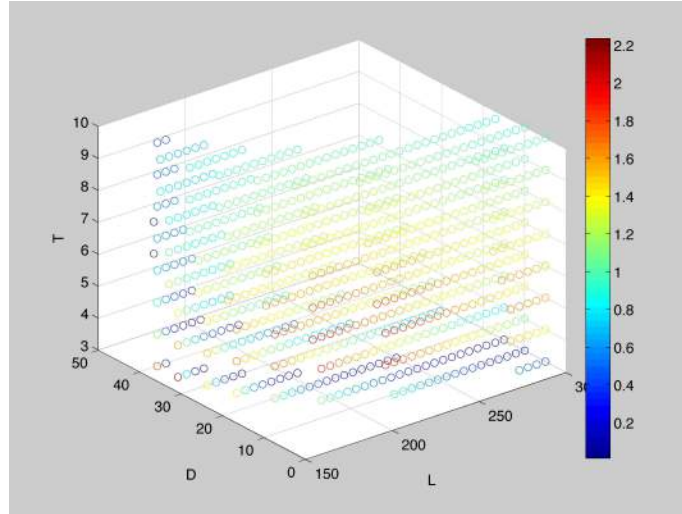


图 15:  $(T, L, D)$ 空间上找到的几何可行域与对应目标函数值 (单位: cm)

我们以 $T = 3\text{cm}$ 为例，在图16中我们可以看到在固定桌面厚度的时候， $L, D$ 只能在一定范围内取值。需要说明的是，当 $L$ 取值比较大（在图16中即为 $L > 300\text{cm}$ ）的时候，其状态并不违反几何约束，但是会形成桌腿张面特别大的桌子形态，这样的桌子十分浪费木材，因此在目标函数的评定上得分很低，我们可以不予考虑。

通过以上计算，我们可以得出可行域内使得目标函数最大的一组 $(T, L, D)$ 的取值 $T = 3.0\text{cm}$ ， $L = 162\text{cm}$ ， $D = 38\text{cm}$ 。各个木条开槽信息的列表如表3所示。开槽位置的定义同前。

### 5.3 问题三：折叠桌设计软件策略及自主设计

#### 5.3.1 模型的搭建

问题三剔除了原桌面形状的限定，需要设计出满足顾客要求的桌高、桌面形状大小和对桌脚边缘线的大致形状的折叠桌出来。这个其实等于要在原有模型的基础上再修改桌面形状。右半侧的桌面边缘线形状用曲线方程

$$x = f(y), y \in [-y_0, y_0] \quad (38)$$

来刻画，然后问题就转化为了：

在给定桌面大小形状和 $H$ 的情况下，设计出最合适的 $L, D$ 以使得桌脚边缘线尽可能地满足客户要求的形状。

这一问中，为了降低问题的处理难度，我们对所设计的桌子外形做出了两个限制，即

1. 设计的桌子依然为最外侧木条折叠完全后着地。
2. 桌面形状同时关于 $y$ 轴与 $x$ 轴轴对称。

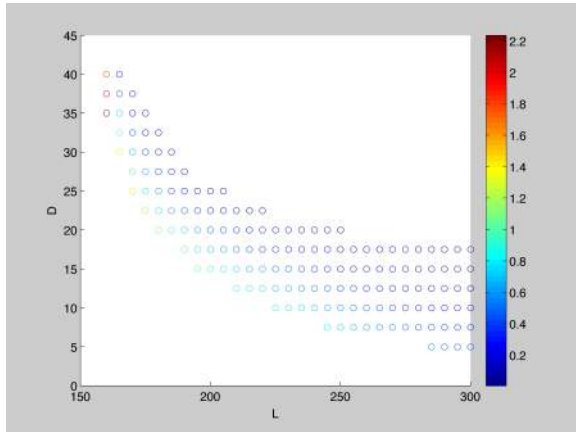


图 16:  $T = 3\text{cm}$ 时 $L, D$ 的几何可行域与对应目标函数值 (单位: cm)

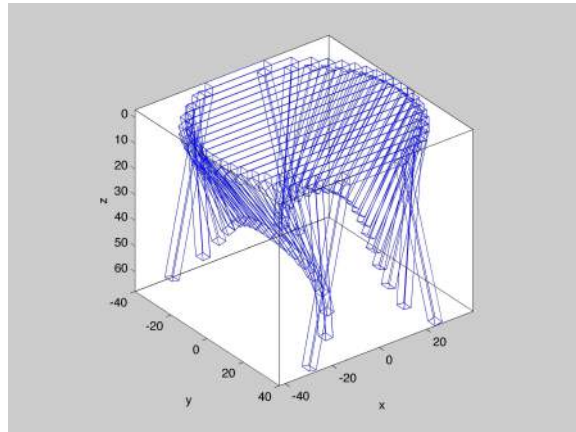


图 17: 最优解情形下桌子在外形

木条编号	开槽起点位置 (cm)	开槽终点位置 (cm)	开槽长度 (cm)
1	43	43	0
2	50.9907	43	7.9907
3	57.2471	43	14.2471
4	62.3877	43	19.3877
5	66.601	43	23.601
6	69.9931	43	26.9931
7	72.6353	43	29.6353
8	74.5778	43	31.5778
9	75.8549	43	32.8549
10	76.4883	43	33.4883
11	76.4883	43	33.4883
12	75.8549	43	32.8549
13	74.5778	43	31.5778
14	72.6353	43	29.6353
15	69.9931	43	26.9931
16	66.601	43	23.601
17	62.3877	43	19.3877
18	57.2471	43	14.2471
19	50.9907	43	7.9907
20	43	43	0

表 3: 各条桌腿开槽参数

这样即可沿用第二题中模型的大体思路。我们假定 $T$ 值恒定。因为在这个问题中，不要求考虑力学上的稳固性和材料的节省，只要求折叠桌去无限接近顾客的形状预期。故而 $T$ 值最终的影响量很小，可以不单独作为自变量考虑，而将其作为常量。

同时我们设定 $N$ 为一个常量，我们不妨认为 $N = 20$ 。虽然 $N$ 越大，桌面形状刻画越细致，但是我们认定20足够达到客户对形状的需求，无限地趋近并没有什么意义，并且其实它并不影响 $L, D$ 的设定。

作为一个纯几何的数学模型，依照问题二的模型套路，我们得到：

$$W = 2y_0 \quad (39)$$

$$p_i = f(y_i) \quad (40)$$

以及(10)式、(3)式、(8)式、(15)式、(16)式、(5)式。

从而桌脚边缘线的坐标表示为：

$$\begin{cases} x_i = P_i + d_i \cos \theta_{i,final} \\ y_i = 0.5W - (0.5 - i)w \\ z_i = d_i \sin \theta_i \end{cases} \quad (41)$$

桌槽长度为：

$$l_i = \sqrt{(d_1 - D)^2 + (p_i - p_1)^2 - 2(d_i - D)(p_i - p_1) \cos \theta_{1,final}} - d_i + D \quad (42)$$

当然，并不是对于任意的 $L$ 和 $D$ ，都能设计出符合高度、形状的桌子，沿用模型二的几何模型约束：

$$\begin{cases} z_{i,final} \leq z_{1,final} \\ H - T \leq d_1 \\ x_{i,final} \geq 0 \\ (d_1 - D) \sin \theta_1 \leq d_i \sin \theta_i \\ d_i > D \end{cases} \quad (43)$$

五个不等式约束条件给出了 $L$ 和 $D$ 的可行域，在可行域内改变 $L$ 和 $D$ ，即可得到不同的桌脚边缘线形状，我们只需在所有可能中找出桌脚边缘线最接近顾客的要求的一种情况即可。

下面以 $H = 53cm, W = 50cm, T = 3cm, N = 20$ ，桌面边缘线为圆形为例，来说明 $L, D$ 可行域的求解以及通过可行 $(L, D)$ 域来找到偏好的桌脚边缘线的过程。在几何约束限制下，应用打靶法求解出可行的 $(L, D)$ 区间。在本实例下，可行域如图18所示。

容易知道，在这个问题中，一旦确定 $L, D$ 。桌子形状就完全确定了，这样桌脚边缘线的形状也就确定了。换句话说，可行域内的点与可能的桌脚边缘线形状是一一对应的。这样，我们只需要在这个可行域范围内找到一个桌脚边缘线与顾客所要求的是最贴近的那一个解即是最优解。如图19所示，我们分别固定 $D = 21cm$ 和 $L = 120cm$ 探究了另外一个变量对桌脚边缘线形状的影响。我们可以看到，随着 $L$ 的增大，桌脚边缘线在 $xy$ 平面上的投影逐渐平滑。随着 $D$ 的减小，桌脚边缘线在 $xy$ 平面上的投影逐渐收缩。由此可以大致判定，在可行域上哪一部分的解产生的桌脚边缘线形状更能尽可能满足客户需要。

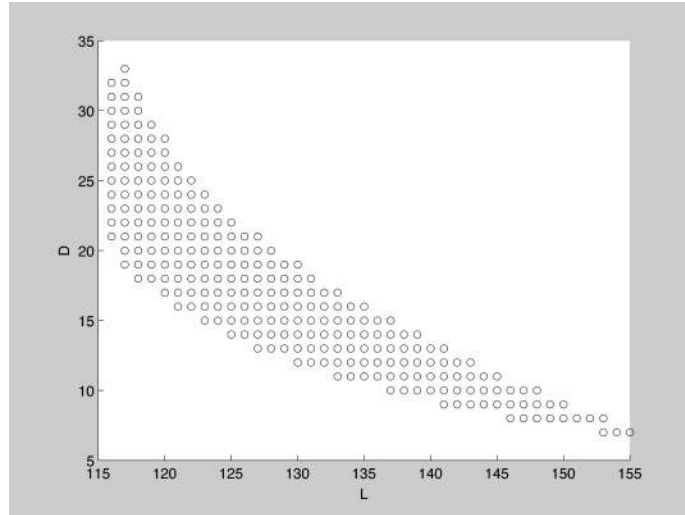
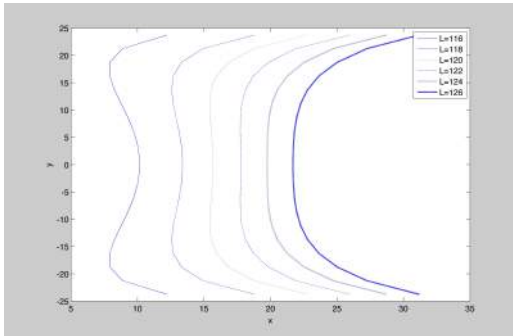
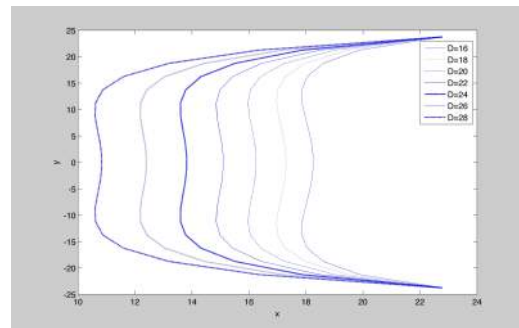


图 18:  $(L, D)$ 可行域 (单位: cm)



(a) 桌脚边缘线xy面上投影随L的变化 (单位: cm)



(b) 桌脚边缘线xy面上投影随D的变化 (单位: cm)

图 19: 桌脚边缘线xy投影

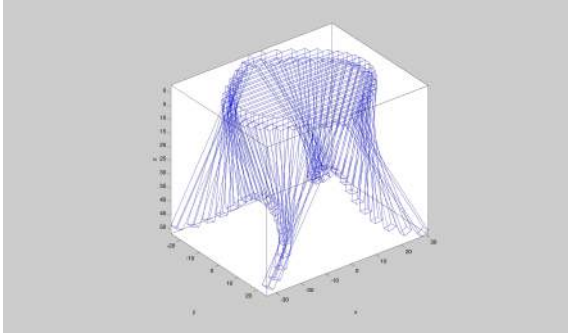


图 20: 桌子的桌面边缘线为抛物线

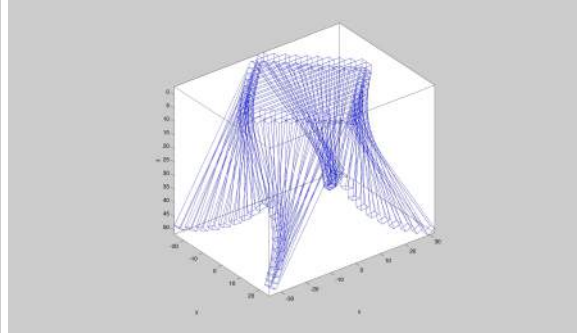


图 21: 桌子的桌面边缘线为方形

### 5.3.2 自己的设计

我们首先改变桌面边缘线的形状，分别使桌面边缘线形状改变为抛物线和方形，由此可以得到图20和图21样的桌子，其动态折叠图分别如图22和图23所示。抛物线桌面的桌子设计参数： $H = 53cm, L = 120cm, W = 50cm, T = 3cm, N = 20, D = 28.7812cm, f(y_i) = \frac{W}{2} - \frac{y_i^2}{25}$ 。方形桌面桌子的设计参数： $H = 53cm, L = 120cm, W = 50cm, T = 3cm, N = 20, D = 29.3750cm, f(y_i) = \frac{W}{2} - |y_i|$ 。

另外考虑改变木条数目，木条数目 $N$ 最少取3桌子还可以达到稳定结构，我们取 $N = 3$ 可以得到如图24和图25所示的桌子。此桌的设计参数： $H = 53cm, L = 120cm, W = 50cm, T = 3cm, N = 3, D = 25.8333cm$ ，三个桌腿长度分别为 $d_1 = 51.6667cm, d_2 = 35.0000cm, d_3 = 51.6667cm$ 。

## 6 求解结果分析

1. 为求解第一问而设计的模型非常地简洁合理，根据几何学得来的开槽长度和桌脚边缘线都是由数学准确描述的。其中桌脚边缘线是用20个散点描述，各点表示对应木条的下表面的尾端中点。结果明晰，已达到最优化。
2. 对于第二问，折叠桌抽象出来的几何模型足够清晰，几何上的约束条件也非常清楚。至于力学上的分析，受力是明晰的，但是各种结构受力方面的参数是依据搜寻来的数据合理估计的。同时为了达到多目标最优化目的，我们根据经验给出了一种各目标之间的影响因子的取值。显然影响因子不同，最后得到的最优化结果也不一样。但是我们所取的影响因子是通过实例的检验的，故而得出的结果应当为一个较优解。
3. 在第三问的模型构建中，我们沿用了最外侧的木条为着地桌脚的假设，并且默认顾客给出的桌面形状同时关于 $y$ 轴对称与 $x$ 轴对称。最优化的方法是满足顾客对桌高桌面大小形状的情况下，尽可能去满足桌脚形状的要求。此思想将问题简化成为了桌高和桌面形状大小必须最优的情况下，找最优桌脚边缘线形状的单目标规划问题。这种解决问题的方法将问题大大简化（不是多目标规划了）而又符合人们的认知，由于顾客也只是给桌脚边缘线的大致形状，这种分析问题的思路也很合理。其中，对桌脚边缘线形状与顾客预期形状的差别可以用所有桌脚实际所处位置与顾客预期位置的差值的平方和来衡量，所得的运算结果越小，说明桌脚边缘线的形状越符合顾客的预期，这样得到的结果是基本可以让顾客满意的。此外我们还通过

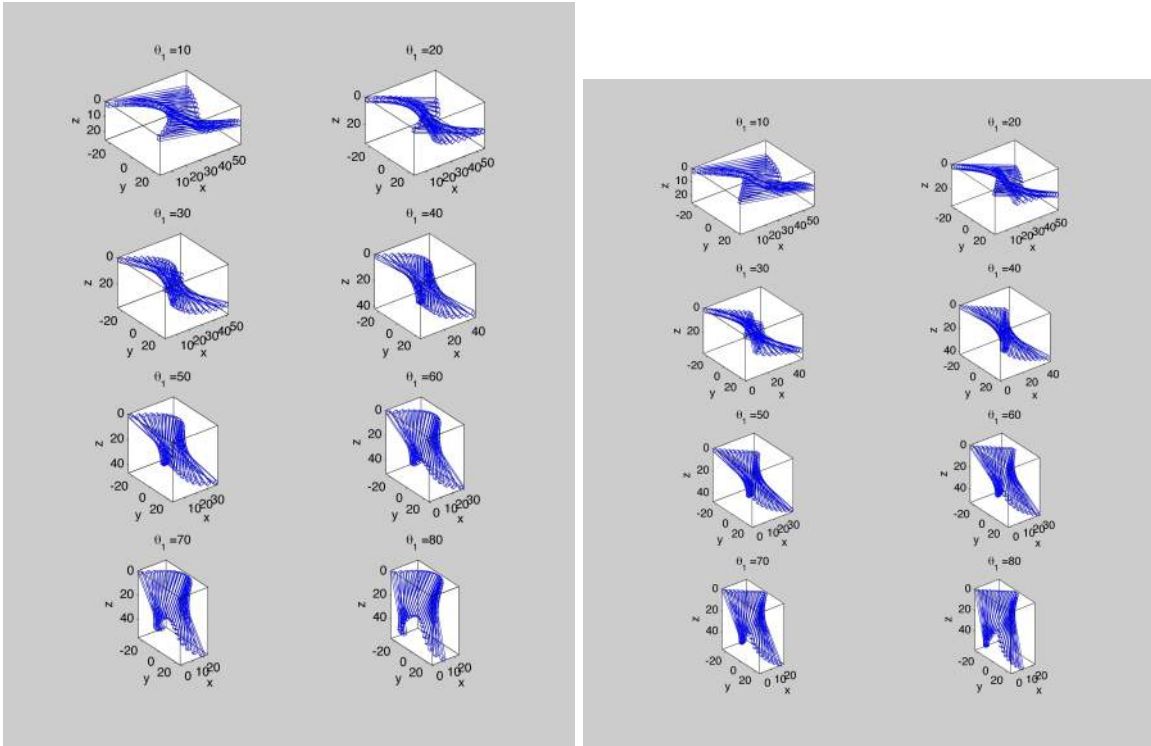


图 22：桌面边缘线为抛物线的桌子的动态折叠图 图 23：桌面边缘线为方形的桌子的动态折叠图

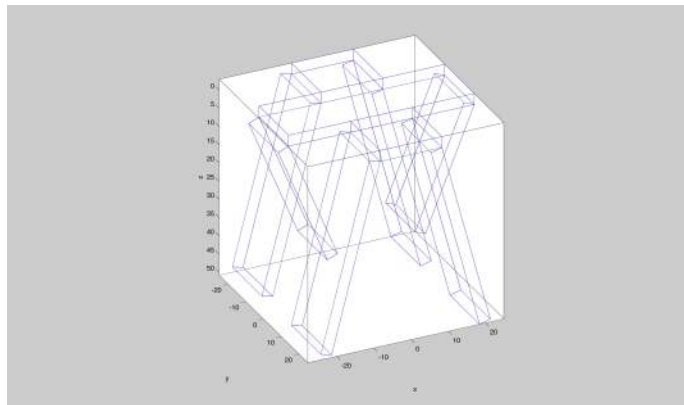


图 24：桌子每侧木板数为3



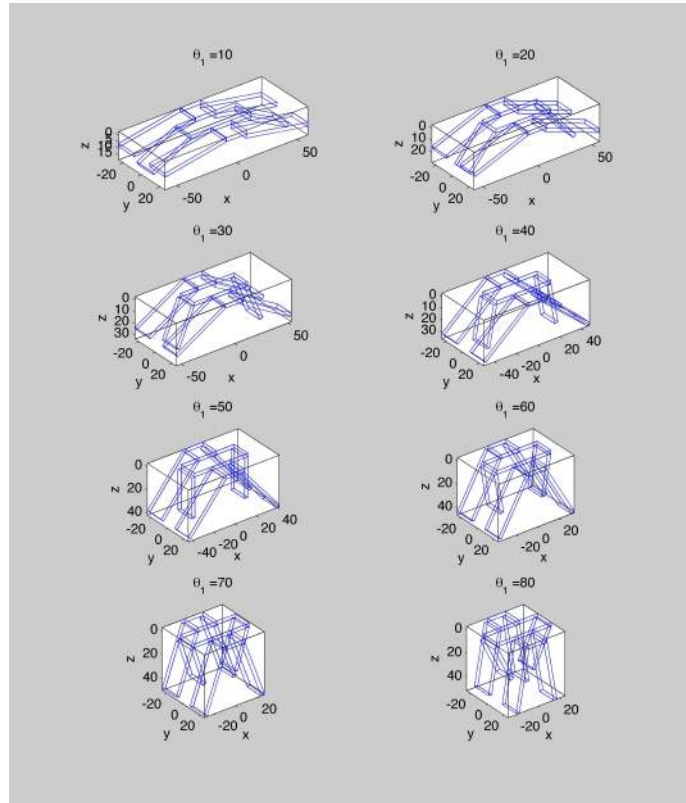


图 25: 每侧木板数为3桌子的动态折叠图

设定部分参数来获得了自己设计的创意折叠桌，我们自己创意设计的桌子用图形展现出来时也是可行且美观的。

## 7 模型评价、改进与推广

### 7.1 模型评价

优点：本题中所建立的数学模型很好地解决了桌面形状满足一定限定条件的折叠桌的分析处理问题，通过给定一个折叠桌的一部分参数可以推知其他参数的可行域甚至具体的值。成功建立了较为完善的最优化目标函数，能够在满足给定参数的桌子设计中筛选出能够兼顾诸如用料节省、稳定性好、加工容易等一系列需求的较优解。模型简单清晰，易于处理。

缺点：在目标函数中没有能够定量地表现出 $N$ 对于桌面形状刻画的精细程度的影响，导致在实际的处理过程中需要自行设定 $N$ 以避免 $N$ 趋向于0，此举虽然对最终的结果影响不大，但是相当于目标函数由四维函数降至三维函数，降低了结果的置信度；存在较强的限制条件，模型之中都假定了着地的桌腿为最外侧的腿，这个是有其合理性的。借用5.2.2的力学分析，着地桌腿为最外侧， $\frac{S_{桌腿}}{S_{桌面}}$ 会相对更大，桌子也更稳定些。但事实上不满足这个假设不代表不能在设计上实现。另外在求解第三问时，我们假定了桌面形状轴对称且中心对称，这个符合我们所见的绝大多数桌子的情况，因而模型假设合理，但是同样不代表必须满足这个条件，其实只要四个着地点满足其所围四边形轴对称且中心对称，并且对角线交点在 $z$ 轴上即可。

### 7.2 模型改进

拓宽限制，假设用编号为 $i$ 的桌腿和编号为 $N + 1 - i$ 的木条作为着地桌腿。则各变量之间的关系有了些微的改变：

$$W = 2y_0 \quad (44)$$

$$w = \frac{W}{N} \quad (45)$$

$$y_i = 0.5W - w(0.5 - i) \quad (46)$$

$$p_i = f(y_i) \quad (47)$$

$$d_i = 0.5L - p_i \quad (48)$$

$$\theta_{i,max} = \arcsin \frac{H - T}{d_i} \quad (49)$$

$$\theta_j = \arctan \frac{(d_i - D) \sin \theta_i}{(d_i - D) \cos \theta_i - p_j + p_i} \quad (50)$$

$$\theta_{j,max} = \arctan \frac{(d_i - D) \sin \theta_{i,max}}{(d_i - D) \cos \theta_{i,max} - p_j + p_i} \quad (51)$$

其中， $j = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, N$

从而桌脚边缘线的坐标表示为：

$$\begin{cases} x_j = P_j + d_j \cos \theta_{j,max} \\ y_j = 0.5W - w(0.5 - j) \\ z_j = d_j \sin \theta_j \end{cases} \quad (52)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, i - 1, i + 1, \dots, N$   
桌槽长度为:

$$l_j = \sqrt{(d_i - D)^2 + (p_j - p_i)^2 - 2(d_j - D)(p_j - p_i) \cos \theta_{i,max}} - d_j + D \quad (53)$$

同样地, 并不是对于任意的  $L$  和  $D$ , 都能设计出符合高度、形状的桌子, 沿用模型二的几何模型约束:

$$\begin{cases} z_{j,max} \leq z_{i,max} \\ H - T \leq d_i \\ x_{j,max} \geq 0 \\ (d_i - D) \sin \theta_i \leq d_j \sin \theta_j \\ d_j > D \end{cases} \quad (54)$$

其他的分析都与前文类似。这样改进之后就允许了更多桌面形状的出现。对于那些满足对称条件的表面来说, 若其最外侧的木条非最长木条, 则尽管可能能够通过问题三解答中所说的设计系统设计出满足最外侧着地的外形, 但显然是不稳固的。而拓宽限制之后, 能够人为或通过计算机程序确定出桌面边缘线函数  $f(y)$  在  $[-y_0, y_0]$  范围内的最小值点, 显然该点所对应的木条最长, 将该木条定为着地桌腿即可得到对应该桌面形状的兼顾各方面要求的较优解。

### 7.3 模型推广

同样的几何模型的构建方法可以移植到各种设计上, 例如设计椅子等其他家具, 都可以通过该模型的建立方法抽象出几何框架来分析和设计。该模型建立过程中所采用的力学分析对实际的生产 and 设计也有着重要的意义。

## 参考文献

- [1] 刘承平. 数学建模方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [2] 材料力学教程[M]. 高等教育出版社, 2004.

## A 附录一：程序源代码

### A.1 绘制一个基础的矩形 (drawRec.m)

```
1 function drawRec(L,W,T,org,theta)
2
3     %以org为原点,画一个按y轴倾角为theta,长宽高分别为L W T的矩形
4     x = [0 0 0 0 0 0 L L L L L L 0 L L 0 0 L L];
5     y = [0 0 0 W W W W W W 0 0 0 0 0 0 0 W W 0];
6     z = [0 T 0 0 T 0 0 T 0 0 T 0 0 0 T T T T T];
7     h = plot3(x+org(1),y+org(2),z+org(3));
8     zdir = [0 1 0];
9     rotate(h,zdir,-theta,org);
10    xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
11    axis auto equal
12    box on
13    hold on
14
15 end
```

### A.2 第一问所用到的程序,包括5.1中所有示意图的绘制和数据的计算 (draw.m)

```
1 function draw(label,isFx)
2     %label=1 表示输出桌子展开过程中的过程图
3     %label=2 表示只输出桌子最后成型时的状态图
4
5     %isFx=0 表示输出原本圆形桌面的情形
6     %isFx=2 表示输出其它形状桌面的情形
7
8     %第一问中的各个参数
9     L = 120;
10    W = 50;
11    T = 3;
12    w = 2.5;
13    H = 53;
14
15    %建立编号矩阵
16    i = 1:20;
17
18    if isFx == 1
19        %每一根桌脚的起点处x坐标p,桌面为倒抛物线形
20        %p = 0.5*W - (0.5*W - (i-0.5)*w).^2/25;
21
22        %每一根桌脚的起点处x坐标p,桌面为方形
23        p = 0.5*W - abs(0.5*W - (i-0.5)*w);
24    else
```

```

25     %每一根桌脚的起点处x坐标p, 桌面为圆形
26     p = sqrt((0.5*W).^2 - (0.5*W - (i-0.5)*w).^2);
27     end
28
29     %每一根桌脚的长度
30     d = 0.5*L - p;
31
32     %钢筋位置到第一根桌脚的距离
33     D = 5*d(1)/6;
34     disp(D);
35
36     if label == 1
37         for theta1 = 10:10:80
38             subplot(4,2,theta1/10);
39             %theta角的计算公式
40             theta = atand(((d(1)-D).*sind(theta1))./((d(1)-D).*
41                 cosd(theta1) - (p - p(1))));
42             tmp = find(theta < 0);
43             theta(tmp) = theta(tmp) + 180;
44             %theta = -theta;
45             for j=1:20
46                 drawRec(d(j),w,T,[p(j),(j-1)*w-0.5*W,0],theta(j));
47             end
48             title([' \theta_1 = ',num2str(theta1)]);
49             set(gca,'ZDir','reverse');
50             set(gca,'YDir','reverse');
51         end
52     end
53     if label == 2
54         theta1 = asind((H-T)/d(1));
55         %theta角的计算公式
56         theta = atand(((d(1)-D).*sind(theta1))./((d(1)-D).*cosd(
57             theta1) - (p - p(1))));
58         tmp = find(theta < 0);
59         theta(tmp) = theta(tmp) + 180;
60         for j=1:20
61             drawRec(d(j),w,T,[p(j),(j-1)*w-0.5*W,0],theta(j));
62
63             %Uncomment below to show the whole table
64             %drawRec(d(j),w,T,[-p(j),(j-1)*w-0.5*W,0],180-theta(j)
65             );
66             %drawRec(2*p(j),w,T,[-p(j),(j-1)*w-0.5*W,-T],0);
67         end
68     end
69     %画出钢筋位置

```

```

68     %plot3 ([p(1)+(d(1)-D)*cosd(theta1), p(1)+(d(1)-D)*cosd(
        theta1)], [-25 25], [(d(1)-D)*sind(theta1), (d(1)-D)*sind(
        theta1)], 'k-', 'linewidth', 4);
69
70     %计算并画出各个木条开槽长度
71     %l_start = d - sqrt((d(1)-D).^2 + (p-p(1)).^2 - 2.*(d(1)-D
        ).*(p-p(1)).*cosd(theta1));
72     %l = D - l_start;
73     %for j=1:20
74         %disp([num2str(j), ' & ', num2str(L/2 - l_start(j)), ' &
        ', num2str(L/2 - D), ' & ', num2str(l(j)), '\\ \hline
        ']);
75         %画出开槽的具体形态
76         %plot([L/2 - l_start(j), L/2 - D + 0.1], [j, j], 'k-', '
        linewidth', 4);
77         %hold on;
78     %end
79     %axis([30 L/2 0 21]);
80     %xlabel('开槽x轴坐标(cm)');
81     %ylabel('桌腿编号');
82
83     %计算并画出桌脚边缘线
84     %xx = p+d.*cosd(theta);
85     %yy = 0.5*W - (i-0.5).*w;
86     %zz = d.*sind(theta);
87     %plot3(xx, yy, zz, 'r*-');
88
89     %Uncomment below to show Oxyz anxis
90     %quiver3(0,0,0,0,0,55,1, 'k', 'LineWidth', 3);
91     %quiver3(0,-25,0,0,25,0,2, 'k', 'LineWidth', 3);
92     %quiver3(-25,0,0,25,0,0,2, 'k', 'LineWidth', 3);
93
94     %反向坐标轴以适应文中建系需求，仍为右手系
95     set(gca, 'ZDir', 'reverse');
96     set(gca, 'YDir', 'reverse');
97     end
98 end

```

### A.3 判断几何约束以及计算目标函数的函数 (isFeasible.m)

```

1 function returnVal = isFeasible(L, W, T, H, D, N)
2
3     %判断给定参数条件下，是否满足几何约束
4     % 如果不满足几何约束，则返回 0
5     % 如果满足几何约束，则返回目标函数值
6

```

```

7      %转换单位cm2m
8      L = L/100;
9      W = W/100;
10     H = H/100;
11     T = T/100;
12     D = D/100;
13
14     %描述桌面边缘线为一个圆
15     f = @(y)(sqrt((0.5*W).^2 - y.^2));
16
17     %计算各参量的数值
18     w = W/N;
19     i = 1:N;
20     y = 0.5*W - (i-0.5)*w;
21     p = f(y);
22     d = 0.5*L - p;
23     theta1 = asind((H-T)/d(1));
24     theta = atand(((d(1)-D).*sind(theta1))./((d(1)-D).*cosd(theta1)
        ) - (p - p(1))));
25     tmp = find(theta < 0);
26     theta(tmp) = theta(tmp) + 180;
27     x = p + d.*cosd(theta);
28     z = d.*sind(theta);
29
30     %各个常数的赋值
31     sig_sw = 4.5e7;
32     sig_pw = 9e6;
33     K = 5;
34     r = 5e-3;
35     G = 1000;
36     rho = 0.54e3;
37     g = 9.80665;
38     P = (L*W*T)*rho*g;
39
40     %四条最外面的桌脚着地，约束不能太大L
41     for tmp = 2:N-1
42         if z(1)<z(tmp)
43             returnVal = 0;
44             return;
45         end
46     end
47
48     %桌脚的高度要足够大，约束不能太小L
49     if H-T > d(1)
50         returnVal = 0;
51         return;

```

```

52     end
53
54     %中间的木条不能相交，约束不能太大D
55     for tmp = 1:N
56         if x(tmp) < 0
57             returnVal = 0;
58             return;
59         end
60     end
61
62     %在桌子成型的时候，钢筋必须能够穿过每个木条，约束不能太小D
63     for tmp = 2:N-1
64         if ((d(1)-D)*sind(theta1) > d(tmp)*sind(theta(tmp))) || (d
65             (tmp) < D)
66             returnVal = 0;
67             return;
68         end
69
70         %计算应力项
71         [~, ind_min] = min(d);
72         sig1 = ((sig_pw/K) - ((4/(w*(T-2*r)))*(((G+P)*cosd(theta1)*d
73             (1)))/(4*cosd(theta(ind_min)-theta1)*(d(1)-D)))) / (sig_pw/
74             K);
75         sig2 = ((sig_sw/K) - ((6*((G+P)/4) - w*T*rho*g*D/2)/(w*T*T)*
76             cosd(theta1)*D + ((G+P)*sind(theta1))/(4*w*T)))/(sig_sw/K)
77         ;
78         %disp([' sig1=' , num2str(sig1), '   sig2=' , num2str(sig2)]);
79
80         if (sig1 < 0) || (sig2 < 0)
81             returnVal = 0;
82             return;
83         end
84
85         %计算桌面和桌脚所张的面积
86         s1 = (p(1)+d(1).*cosd(theta1))*W*2;
87         s2 = sum(p.*w)*2;
88
89         %返回目标函数值
90         returnVal = (1/N) * (1/(L*W*T)).^(1.5) * ( sig1 ).^(1.5) * (
91             sig2 ).^(0.5) * ( s1/s2 ).^(1);
92     end

```

A.4 第二问中，利用打靶法找到 $(T, L, D)$ 可行域以及找出最优解 (tryTLD.m)

```

1 %设定题中所给的参数
2 W = 80;

```



```

3 H = 70;
4 N = 20;
5 max = 0;
6
7 %打靶法寻找可行域以及最优解
8 for T = 1.1:0.1:5
9     for L = 5:1:300
10        for D = 20:1:100
11            tmp = isFeasible(L, W, T, H, D, N);
12            if tmp > 0
13                scatter3(L, D, T, 36, tmp);
14                hold on;
15                if tmp > max
16                    max = tmp;
17                    index = [T, L, D];
18                end
19            end
20        end
21    end
22 end
23
24 xlabel('L'); ylabel('D'); zlabel('T');
25 colorbar('location','EastOutside');
26
27 %显示找到了最优解T,L,D
28 disp(index);
29
30 %Uncomment below to draw the solution found
31 %drawComplete(index(2),W,index(1),H,index(3),N);

```

A.5 第三问中，利用打靶法找到 $(L, D)$ 可行域 (tryLD.m)

```

1 %参数设定
2 W = 50;
3 H = 53;
4 N = 20;
5 max = 0;
6 T = 3;
7
8 for L = 1:1:300
9     for D = 1:1:100
10        tmp = isFeasible(L, W, T, H, D, N);
11        if tmp > 0
12            scatter(L, D, 'k');
13            hold on;
14        end

```

```

15     end
16 end
17
18 xlabel('L'); ylabel('D');

```

## A.6 绘制桌脚边缘线 (drawMargin.m)

```

1 function drawMargin(L,W,T,H,D,N)
2     f = @(y)(sqrt((0.5*W).^2 - y.^2));
3     w = W/N;
4     i = 1:N;
5     y = 0.5*W - (i-0.5)*w;
6     p = f(y);
7     d = 0.5*L - p;
8     theta1 = asind((H-T)/d(1));
9     theta = atand(((d(1)-D).*sind(theta1))./((d(1)-D).*cosd(theta1)
10         ) - (p - p(1))));
11     tmp = find(theta < 0);
12     theta(tmp) = theta(tmp) + 180;
13     x = p + d.*cosd(theta);
14     z = d.*sind(theta);
15     plot3(x,y,z);
16     hold on;
17 end

```