

Report on the Project Levitation

I. Honor Code:

Sign of my name: _____

II. Cite the Problem:

Levitation

A light ball (e.g. a Ping-Pong ball) can be supported on an upward airstream.

The airstream can be tilted yet still support the ball. Investigate the effect and optimize the system to produce the maximum angle of tilt that results in a stable ball position.

III. Pre-experiment:

现象：使用气泵产生气流，将一个乒乓球放在气流上方，向上流动的气流可以托起乒乓球，是乒乓球悬浮在空中。倾斜气泵，使气流与竖直方向产生一个角 θ ，观察到乒乓球仍然可以悬浮在空中。情况如图所示。

分析：它倾斜的极限 θ 可能与这样的几个参数有关。气流的速度 v ，球的质量 m ，球的半径 R 。

结论：

1. 本次预实验观察到了题中所示的现象。
2. 本次预实验找出了可能影响偏角的 θ 的因素。

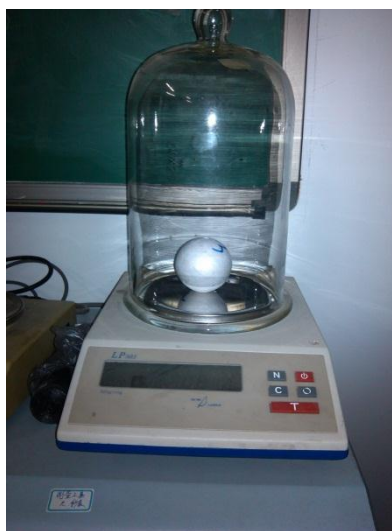


3. 为了研究这几个因素对最大偏角 θ_{\max} 的影响，我们购买了大小不同，质量不同的泡沫球以观察参量 m, R 对 θ 的影响，并且选用的可以调节风速的气泵，以研究 v 对 θ 的影响。

IV. The Experiment:

1. 实验方法：

- 1) 将球由大到小依次编号1~9，分别测出其直径和质量。



- 2) 将球依次放

到竖直气流的上方，缓慢倾斜气流的方向，当球落下的时候，记录下气流倾斜的角度 θ_{\max} 。（注，角度的测量是由一个安放在气泵上的ipod touch完成）

- 3) 使用如图所示的方法测量风速：

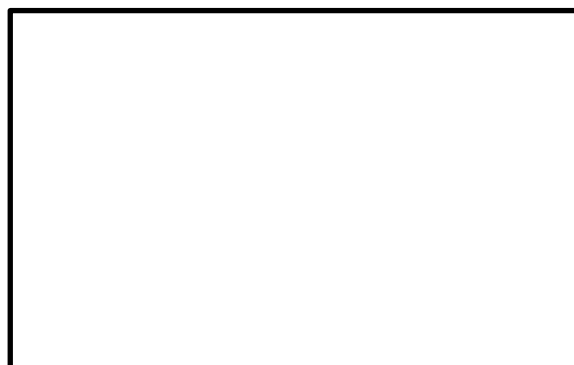
$$Fdt = \rho Svd t$$

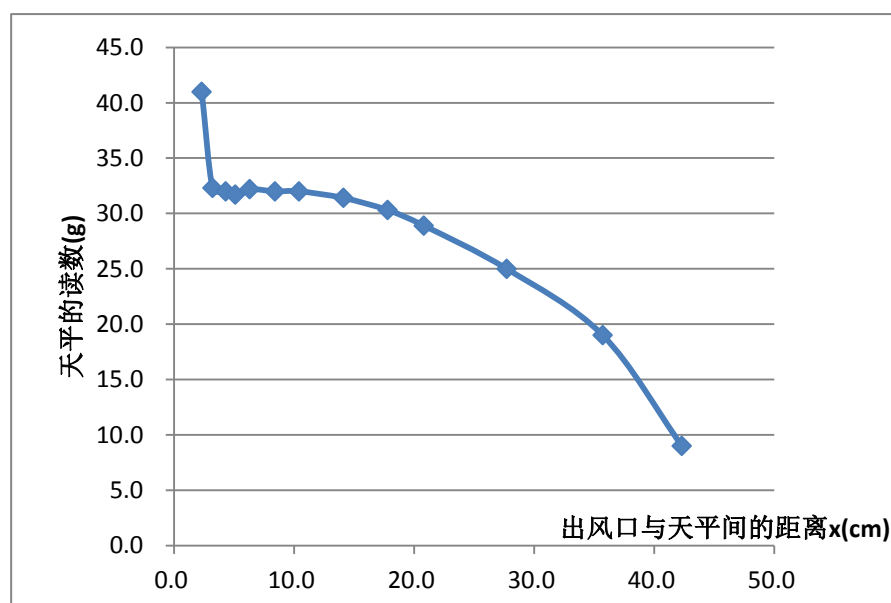
其中 F 为冲击力， ρ 为空气密度， S 为出风口的面积， $S = \frac{\pi}{4}d^2$ ，由此可以得

出：

$$v = \sqrt{\frac{4mg}{\pi d^2 \rho}}$$

显然，出风口距离天平的距离会影响到对流速的测量，经过研究发现，距离和读数间有着这样的关系：





即在某一段距离上,其读数是相对稳定的,我们就取这一段读数作为上述公式中的 m 。

当出风口与天平间的距离 x 较大时,由于天平的托物盘的大小有限,导致出风口吹出来的风有一部分没有打到天平上,致使读数较小;并且,当出风口与天平间的距离 x 过大时,原本静止在从出风口到天平这一段空间周围的空气会和吹出来的气体间产生相对速度,从而会对吹出来的气流产生粘滞阻力的作用,减小了风的流速,致使天平读数较小。

上述公式的推导是基于流动的空气打到天平的托盘上面之后,空气元的速度由 v 减小到0,并且空气从托盘四周流走的基础上的。(简言之,就是按照完全非弹性碰撞的模型来考虑)所以当出风口与天平间的距离 x 较小的时候,气体不再易于从托盘的四周流走,气体的堆积会增大天平托盘正上方的压力,导致读数偏大。

注,因为流速在气流场的各处分布不均,并且相差较大,我们这里所测得流速值仅仅作为后面验证关系式时的一个辅助,用以验证后面关系式中的流速是否大概在这个范围内。并且我们测流速的时候,是在气泵上面套接了一个塑料管(管口直径 $D=26.00\text{mm}$),并用塑料管将气流导向天平的。而做实验的时候,却用的是在气泵出气口套上一个漏斗(出气口内径 $d=7.76\text{mm}$),以聚集空气束。因此这两个流速值只在数量级上相同,具体的值应该不同。

2. 实验数据如下表：

编号	m(g)	D(mm)	Θ_{\max}						
			1档	1.5档	2档	3档	4档	5档	6档
1	3.839	66.26	50°	49°	49°	49°	53°	50°	53°
2	3.160	63.30	47°	50°	50°	51°	49°	42°	53°
3	2.107	54.20	46°	41°	52°	42°	30°	34°	30°
4	1.230	47.50	36°	41°	38°	-	-	-	-
5	0.935	44.12	23°	30°	31°	-	-	-	-
6	0.648	37.00	-	-	-	-	-	-	-
7	0.404	27.96	-	-	-	-	-	-	-
8	0.217	23.60	-	-	-	-	-	-	-
9	0.098	17.90	-	-	-	-	-	-	-

注，表格中“-”表示在这种情况下，即使出风口竖直放置，球也不能稳定地悬浮。

档位	1	3	5
气流速度v(m/s) (大管径D)	22.14	25.96	30.06

我们在后面的实验中找到了一个电子风速计，并且重构了当时做实验时的装置，

即我们是测量的小管径d的情况，风速如下表：

档位	1	2	3	3.5	4	5	5.5
气流速度v(m/s) (小口径d)	6.7	7.1	9.7	11.5	11.6	10.6	11.6

据其他同样在进行这个实验的小组反映，这个电子风速仪不是很准确，在这里把

数据放出来仅作参考。

3. 实验结果：

实验中得出了上述的数据，观察到了这样几个比较显著的现象。

- 1) 当球的半径（相对于出风口的半径）较小的时候，球的晃动比较厉害，球的悬浮表现出不稳定的状态。当球的半径较大，以至于球可以稳定悬浮时，其最大偏角 θ_{\max} 大小都在 50° 左右。
- 2) 球在可以悬浮的时候，球会做高速的转动，球转动的 ω 方向垂直于气流方向和重力方向所组成的平面（简称为平面 Π ，下同）。
- 3) 球在 $\theta > 0$ 的时候，球的中心会偏离气流的中心，并且 θ 在将要达到 θ_{\max} 的时候，球的边缘几乎脱离有较强气流的区域。
- 4) 在 θ 逐渐增大的过程中，球离出气口的距离是有变化的，竖直的时候，距离较小，而偏转的过程中，距离增大，再增大时，距离不再变化，甚至感觉距离有减小。

V. Construct the Physics Model:

1. 引入的参量：

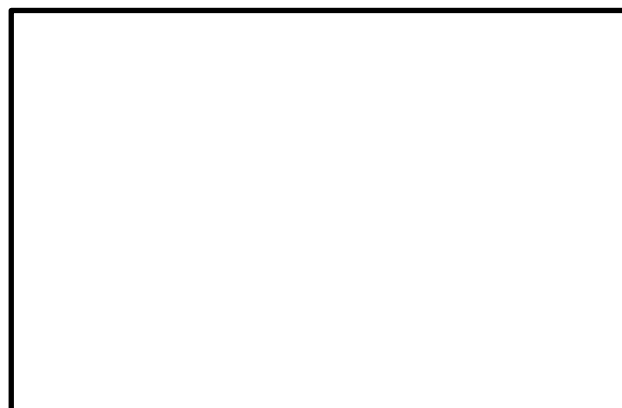
- 变量：球的半径 R 、气流的速度 v ，球的质量 m
- 一些常量：空气的密度 ρ 、特征量 \hat{D} 、特征量 \hat{x}
- 分析过程中的一些中间量：气流边际线与球心的距离 d ，球转动的角速度 ω ，

α （与 d 有关）

- 特征量 P ，修正系数 β

2. 对实际情况的一个简化：

实际情况中是一个小球被气流托起，而鉴于球体在积分上的困难，因此我们把实验中的小球



简化为一个底面与平面 Π 平行的圆柱体。圆柱体的底面与球体的大圆截面相同，而圆柱体的高我们取 $\hat{D} = \frac{4}{3}R$ ，于是我们就可以有简化前和简化后的模型体积相同。 $\hat{D}\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3$

这样，我们便把一个三维空间的问题，压到了一个平面中来解决。

3. 对整体受力分析：

1) CE段： 受到气体对球的

冲击力 $\vec{F}_{\text{冲}} = \vec{F}_r + \vec{F}_l$ 。这个

冲击力我们是按照完全弹

性碰撞的情况构建的，因此

其各点处对柱体的力的方

向都是垂直于柱体表面而指向柱体圆心的，从而不会对柱体产生力矩。

2) \widehat{CED} 和 \widehat{CAFBD} :受到因为伯努利原理而产生的压强，从而产生一个力 \vec{F}_B 。

3) 因为气体流动的时候会有粘滞阻力，于是 \widehat{CED} 段会对柱体产生顺时针方向的力矩 \vec{L}_1 ，而会在 \widehat{CAFBD} 段对柱体产生逆时针方向的力矩 \vec{L}_2 ，这两个力矩平衡，使柱体在垂直于平面 Π 的方向上转动（转动方向指 ω 的方向）。

4) 重力 \vec{G}

5) 说明：本问题中涉及到流体的问题，实际情况中小球（即使是柱体）周围的流体状态十分的复杂。

我们为了简化模型引入了气流边界线 ℓ （实际情况中是一个面），并且认为 ℓ 上方的气体有一定的流速，而 ℓ 下方的气体是静止的。由于本试验是研究最大偏转角 θ_{\max} ，于是我们只关心 θ 快要趋近 θ_{\max} 的情况，因此可以认为 ℓ 上方无穷大的空间内，都有着恒定的气流场。（这也说明，以下推出的结论，不

可以将 $\theta=0$ 带入方程中来验证其是否正确, 除非 θ_{\max} 就在 $\theta=0$ 附近) 根据我们实验观察到的第三个现象, 在 θ 将要达到 θ_{\max} 的时候, 球的边缘几乎脱离有较强气流的区域, 这里所指的有较强气流的区域就是我们所说的 ℓ 上方的区域。这也从侧面反映了我们假设的可行性。因此, 我们不必再关心出气口气管的直径问题, 只需要把气流当做一个 ℓ 上方的无限大的均匀气流场即可。

另外, 我们是针对气体对柱体的不同作用对其分开进行讨论的, 以至于仅仅CE段就受到 $\vec{F}_{\text{冲}}$ 、 \vec{F}_B 、 \vec{L}_1 等多个部分的作用。它们只是模型抽象出来的几个力, 实际情况中, 它们当然是通过气流一次性作用到球上的, 但是为了便于分析, 我们把它们分开作为几个力来分别讨论。

总的来说, 我们的受力分析由两部分组成: 第一部分是力, 我们认为有 $\vec{F}_{\text{冲}}$ 、 \vec{F}_B 、 \vec{G} 这三个力, 并且他们都作用于柱体的重心; 第二部分是力矩, \vec{L}_1 和 \vec{L}_2 平衡时, 柱体会会有一个恒定的角速度 ω 。

4. 具体的受力分析:

$$1) \quad \vec{F}_{\text{冲}} = \vec{F}_t + \vec{F}_1$$

我们认为仅在CE段受到冲击力, 对冲击力进行分解, 我们可以算出

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= A(\alpha^3 - 3\alpha + 2) \\ \vec{F}_1 &= A(1 - \alpha^2)^{3/2} \end{aligned}$$

其中, $A = \frac{8}{9}R^2v^2\rho$ 、 $\alpha = \frac{d}{R}$, 下同。

注, 为了不让数学问题过多地塞满这份报告, 这里仅仅谈及物理问题, 大多数的问题利用微元法和积分的方法解决, 具体过程不再列下来, 详情见附录。

$$2) \quad \vec{F}_B$$

我们认为CD段气体的速度都为 v , 而CAFBD段的气体速度都为0, 并且柱体在以 ω 的角速度旋转。计算的时候我们发现 ℓ 方向的力都由于对称性而抵消, 于是只剩下垂直于 ℓ 方向的力。并且如果设C、D关于AB的对称点设为 C' 、 D' , 则AC、 AC' 的力也会抵消, 于是只用算 $C'FD'$ 上所受到的力。

因此 \vec{F}_B 的来源为CED段和C' FD' 段，方向为垂直于 ℓ 方向

$$\vec{F}_B = A \frac{3}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \left(1 - 2 \frac{\omega R}{v}\right)$$

3) \vec{L}_1 、 \vec{L}_2

粘滞阻力的公式为 $f = \eta \frac{dv}{dx} \Delta S$ ，我们这里把它简化为 $f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta S$ ， Δv 我们把它

处理成球面和气流的相对速度，并且设 $\Delta x = \hat{x}$ ，其中 \hat{x} 只是一个特征距离，它

在后面会被约掉。于是

$$L_1 = -\eta \frac{v - \omega R}{\hat{x}} \cdot 2R \arccos \alpha \cdot \hat{D} \cdot R$$

$$L_2 = \eta \frac{\omega R}{\hat{x}} \cdot 2R(\pi - \arccos \alpha) \cdot \hat{D} \cdot R$$

$$L_1 + L_2 = 0$$

联立可以解得

$$\frac{\omega R}{v} = \frac{\arccos \alpha}{\pi}$$

把它带入 \vec{F}_B 的表达式中可以得到

$$\vec{F}_B = A \frac{3}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \alpha\right)$$

5. 列出力的平衡方程：

$$F_B = F_{\perp} + mg \sin \theta$$

$$F_{\tau} = mg \cos \theta$$

于是可以解得：

$$\tan \theta = \frac{\frac{3}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \alpha\right) - (1 - \alpha^2)^{3/2}}{\alpha^3 - 3\alpha + 2}$$

$$\left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \alpha^2} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos \alpha\right) - (1 - \alpha^2)^{3/2}\right] \sin \theta + [\alpha^3 - 3\alpha + 2] \cos \theta = P$$

$$\text{其中, } P = \frac{9mg}{8\rho v^2 R^2}$$

6. 回归物理：

现在我们的数学推导告一段落，我们将就这一个方程组来再对实验中的现象进

行分析。小球的悬浮实际上就是小球在 θ 增大的过程中，小球不断找到其平衡位

置，而这个平衡位置由两个参数来刻画。第一个是小球离出气口的距离，而我们

知道，离出气口越远，气流的速度越小，因此，参数 v （气流速度）就可以用来刻画 l 方向上的位置。第二个是小球中心离出气口中心的位置 d ，在上面的式子里面 $\alpha = \frac{d}{R}$ ，因此参数 α 就可以刻画垂直于 l 方向上的位置。

上面的第一个式子（tan一式），实际上告诉了我们， θ 变化时，关于垂直于 l 方向上的平衡位置（ α ）在哪里。而第二个式子则是说明 θ 变化时，关于 l 方向上的平衡位置（ v ）在哪里。

VI. Test Our Model:

我们结合第一个式子（tan一式）对第二个式子（sin、cos一式）化简，可得

$$\alpha^3 - 3\alpha + 2 = P \cos \theta$$

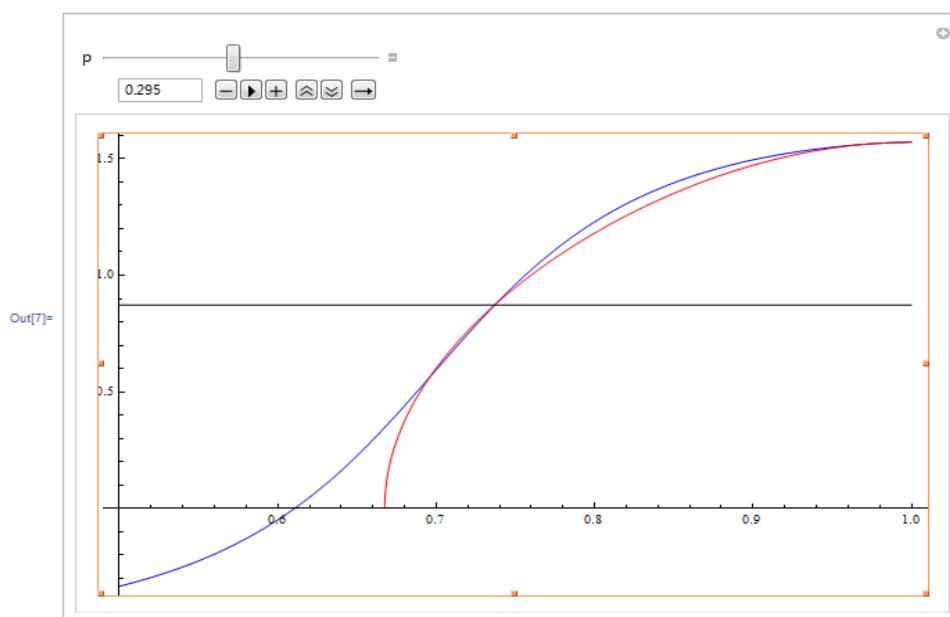
由于这样的方程组难简化简，于是我们通过画函数图象便找到交点的方法来借这

个方程组（当然此方程有一个 $\alpha=1, \theta=\frac{\pi}{2}$ 的解，但是这个解没有太大意义）

$$\theta = \text{ArcTan}\left[\frac{-2(1-\alpha^2)^{3/2} + 3\sqrt{1-\alpha^2}\left(1 - \frac{2\text{ArcCos}\alpha}{\pi}\right)}{2(2-3\alpha+\alpha^3)}\right]$$

$$\theta = \text{ArcCos}[(2-3\alpha+\alpha^3)/P]$$

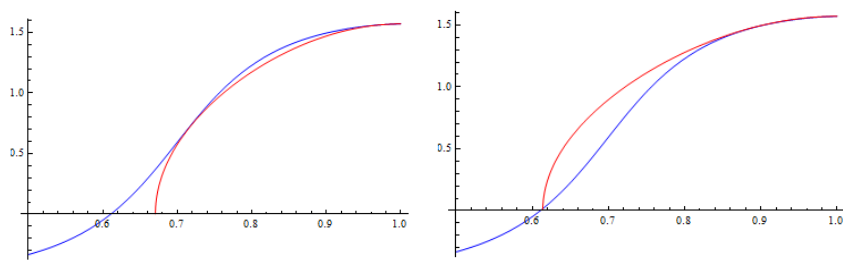
```
In[7]= Manipulate[Plot[{ArcTan[ $\frac{-2(1-\alpha^2)^{3/2} + 3\sqrt{1-\alpha^2}\left(1 - \frac{2\text{ArcCos}\alpha}{\pi}\right)}{2(2-3\alpha+\alpha^3)}$ ], ArcCos[(2-3\alpha+\alpha^3)/P]}, {a, 0.5, 1}, PlotStyle -> {Blue, Red, Black}], {p, 0.2, 0.4}]
```



1. 解释稳定悬浮：

我们使用实验中的第一个数据进行验证, $m=3.839\text{g}$, $R=33.13\text{mm}$, 取 $g=9.8\text{m/s}^2$, $\rho=1.205\text{kg/m}^3$, $\theta=50^\circ$ 。我们在Wolfram Mathematica 8.0 上面画出了上述方程组的函数图象, 并且通过改变P的大小, 观察P为何值时两函数图象相交于 $\theta=50^\circ$ 处。

这里我们通过拖动滑块, 改变P的值, 发现, $P=0.295(\text{SI})$ 的时候, 这两个函数图象的交点在 $\theta=50^\circ$ 处。带入参数解得 $v=10.415\text{m/s}$ 。通过和前面测得的风速至比较可知, 这个结果在前面所测得的风速范围之内, 证明我们的模型比较准确。进一步地观察可以得到, 只有在 $0.290 < P < 0.390 (\text{SI})$ 的时候, 上述两个函数才有交点, 球才能在偏离一定角度的时候悬浮在空中。



由实验数据, 算的第一档时的各个球的P值如下表(v 都取 10.415m/s):

球编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P (SI)	0.295	0.266	0.242	0.184	0.162	0.159	0.174	0.131	0.103

而球不能悬浮是从第6个球开始的, 临界的P值应该在0.17左右, 而不是图象中得到的0.290。可见, P值确实有一个临界值, 但是, 可能由于模型简化的原因, 是实际的临界P值和理论的临界P值有一定的差距。

2. 解释其他观察到的现象：

我们通过拖动滑块, 改变P值可以得出, 当 θ 增大时, α 越来越接近1, 即球与出气孔的中心越来越远, 这也叫好的符合了我们观察到的第三个现象。

我们还可以看到,在 θ 增大的过程中, v 需要先减小后增大,即球离出风口的距离需要先增大后减小。这能够符合我们实验中观察到的第四个现象。

3. 总结:

由理论可知, P 取适当值的时候可以使悬浮的角度最大,但是由于数学表达式复杂且不是线性关系,我们无法得出确切的变化规律。我们尝试过对其中一个表达式进行有效区域内的拟合,但是即使使用较高多项式次数(尝试到了 $n=9$)的拟合,效果也并不理想。

但是从物理上来思维就不难理解, P 实际上正比于球的密度和线度,反比于风速的平方。风速比较大,相应地,球的密度和线度就可以大一些。球的密度太大,气流就可能无法托起小球;球的密度太小,球就容易受到不稳定气流的干扰,从而不稳定。你可能会奇怪,我们的方程里面并没有考虑不稳定气流的影响,但为什么会看出球受到不稳定气流影响的情况呢。因为上述方程并不是在 P 较大的时候没有解,而是 P 过大的时候,解 θ 几乎在 $\frac{\pi}{2}$ 附近,我们通过函数图象看到,两函数图象“交叉”的地方太短,我们就认为这个解较“弱”,它可能表示,球难以保持平衡。所以,要使方程有比“强”的解, P 需要在一定的范围内。

就 P 的理论临界值,和实际临界值的差距,可能是由 R 在等效过程中,并没有相应的变化。但显然,当它为球体的时候,可以看成许多柱体,而 R 是这些柱体中半径最大的值。所以 R 偏大,可能造成它与实际的差距。

VII. Conclusion:

我们提出的模型在一定程度上能够适用于题目中所示的物理情形。

它分析清楚了球在倾斜气流还能够悬浮的原因,它解释了实验中观察到的几个现象,它开拓了在力学分析中将三维问题转化为二维问题的一种方法,它证实了在这个问题中

所抽象出来的几个力的正确性，它说明了一个关键特征参量 P 在衡量球是否能悬浮中所起到的作用。

但是，它没有能够得到 θ_{\max} 的显性表达式，没有能够细致分析各参量对 θ_{\max} 的影响，他不能够解释实验中所观察到的当球能够比较稳定悬浮时 θ_{\max} 几乎不变的现象。我们在实验中得到的最大角度在 53° 左右，我们没有找出 θ_{\max} 是否存在一个理论最大值，并在实验室中做出理论最大值。另外，球是否能够稳定悬浮，在很大程度上也受到湍流的影响，而我们的模型中并没有考虑这样的影响，这也是我们模型的一个不足之处。

VIII. 附录1 小组成员：曾培 于佩 张楚珩

IX. 附录2 数学推导：