《高等量子力学》第 25 讲

2. 相对论不变性

1)一般 Lorentz 不变性

Dirac 方程$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi(x)=0$与两个空间有关，4 维 Minkowski 空间与 4 维 Dirac 空间。$x_{\mu},\partial_{\mu},\gamma_{\mu}$是 Minkowski 空间的 4 矢量，而$\psi$和$\gamma$矩阵的任意分量是 4 维 Dirac 空间中的矩阵。在对时空坐标进行 Lorentz 变换

$$x'=\Lambda x$$

时，$\psi(x)$应该怎样变换

$$\psi'(x')=S\psi(x),$$

即Λ和S应该满足怎样的关系才能保证 Dirac 方程的 Lorentz 不变性？这里Λ是 Minkowski 空间的 4X4 矩阵，S是 Dirac 空间的 4X4 矩阵。

由 Lorentz 标量在变换下保持不变，

$$x_{\mu}'x'^{\mu}=\Lambda_{\mu}{}^{\nu}x_{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}x^{\sigma}=x_{\mu}x^{\mu},$$

Λ应该满足

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}=\left(\Lambda^{T}\right)^{\nu}{}_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}=\left(\Lambda^{T}\Lambda\right)^{\nu}{}_{\sigma}=g^{\nu}{}_{\sigma}=g^{\nu\rho}g_{\rho\sigma}\quad,\quad\Lambda^{T}\Lambda=I$$

两边求行列式，

$$\det\left(\Lambda^{T}\Lambda\right)=\det\Lambda^{T}\det\Lambda=\det\Lambda\det\Lambda=1,\qquad\det\Lambda=\pm1。$$

满足$\det\Lambda=+1$的变换称为正 Lorentz 变换，满足$\det\Lambda=-1$的变换称为非正 Lorentz 变换。

在上述Λ,S变换下，Dirac 方程

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi(x)=0$$

变为

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}-m\right)\psi'(x')=0,$$

$$\left(i\gamma^{\mu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\partial_{\nu}-m\right)S\psi(x)=0,$$

这里用到了

$$\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\to\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\ \mu}\partial_{\nu}\text{。}$$

将变换前的 Dirac 方程左乘 S 后有

$$\left(iS\gamma^{\mu}S^{-1}\partial_{\mu}-m\right)S\psi(x)=0,$$

比较变换前后的两个方程，得到 Dirac 方程具有 Lorentz 不变性的条件是

$$S\gamma^{\mu}S^{-1}=\gamma^{\nu}\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\ \nu}\quad\text{。}$$

这就是 Dirac 方程的一般 Lorentz 不变性对变换 S 的限制条件。下面具体考虑不同的 Lorentz 不变性 Λ 对应的 S 的形式。

2）连续 Lorentz 变换

取无穷小 Lorentz 变换

$$x'^{\mu}=\Lambda^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu},\qquad \Lambda^{\mu}_{\ \nu}=g^{\mu}_{\ \nu}+\omega^{\mu}_{\ \nu},$$

$\omega^{\mu}_{\ \nu}$ 是一无穷小量。条件 $\Lambda_{\mu}^{\ \nu}\Lambda^{\mu}_{\ \sigma}=g^{\nu}_{\ \sigma}$ 要求

$$\omega^{\mu}_{\ \nu}=-\omega_{\nu}^{\ \mu},$$

是全反对称张量。条件 $\Lambda\Lambda^{-1}=I$ 要求

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\ \nu}=g^{\mu}_{\ \nu}-\omega^{\mu}_{\ \nu}\text{。}$$

设与无穷小 Lorentz 变换对应的

$$S=I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},\qquad S^{-1}=I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},$$

$\sigma_{\mu\nu}$ 是 Lorentz 张量，每个分量是 Dirac 空间的 4X4 矩阵，待定。代入 S 应该满足的条件 $S\gamma^\mu S^{-1}=\gamma^\nu\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu$，有

$$\left(I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\gamma^\rho\left(I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)=\gamma^\nu\left(g^\rho{}_\nu-\omega^\rho{}_\nu\right),$$

$$\gamma^\rho+\frac{i}{4}\left(\gamma^\rho\sigma_{\mu\nu}-\sigma_{\mu\nu}\gamma^\rho\right)\omega^{\mu\nu}=\gamma^\rho-\omega^{\rho\nu}\gamma_\nu,$$

$$\begin{aligned}\frac{i}{4}\left[\gamma^\rho,\ \sigma_{\mu\nu}\right]\omega^{\mu\nu}&=-\frac{1}{2}\left(\gamma_\nu\omega^{\rho\nu}+\gamma_\mu\omega^{\rho\mu}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\gamma_\nu g^\rho{}_\mu\omega^{\mu\nu}+\gamma_\mu g^\rho{}_\nu\omega^{\nu\mu}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\gamma_\nu g^\rho{}_\mu-\gamma_\mu g^\rho{}_\nu\right)\omega^{\mu\nu},\end{aligned}$$

考虑到 $\omega_{\mu\nu}$ 的独立性，有

$$\left[\gamma^\rho,\ \sigma_{\mu\nu}\right]=2i\left(\gamma_\nu g^\rho{}_\mu-\gamma_\mu g^\rho{}_\nu\right),$$

这就是 $S=I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$ 中 $\sigma_{\mu\nu}$ 与 γ^μ 的关系。满足此条件的 $\sigma_{\mu\nu}$ 可以取为

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\right]。$$

显然，$\sigma_{\mu\nu}=-\sigma_{\nu\mu}$ 是全反对称张量矩阵。

3)自旋

自旋是相对论效应，Dirac 方程自动包含自旋。

对于无限小 Lorentz 变换，Dirac 旋量

$$\begin{aligned}\psi'(x')&=\psi'(\Lambda x)=\psi'(x+\omega x)\\&=\left(1+\omega^{\nu\mu}x_\mu\partial_\nu\right)\psi'(x)=\left(1-\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu\right)\psi'(x)\end{aligned}$$

两边左乘以$1+\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu$，有

$$\begin{aligned}\psi'(x)&=\left(1+\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu\right)\psi'(x')\\&=\left(1+\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu\right)\left(I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x)\\&=\left(I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\left(1+\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu\right)\psi(x)\\&=\left(I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+\omega^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu\right)\psi(x)\\&=\left(I-\frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}+i\left(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu\right)\right)\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x)\end{aligned}$$

这里已忽略二阶无穷小。

如果取无限小 Lorentz 变换为转动，则变换是由角动量矩阵生成的，

$$\psi'(x)=e^{-\frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}\psi(x)=\left(I-\frac{i}{2}J_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\psi(x)$$

其中$J_{\mu\nu}$是角动量张量矩阵。比较上面二式，有

$$J_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}+i\left(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu\right)。$$

由角动量矢量与张量的关系（例如$L_x=yp_z-zp_y\equiv L_{yz}$），

$$J_1=J_{23},\quad J_2=J_{31},\quad J_3=J_{12}$$

并取$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu\right]$，$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\-\vec{\sigma}&0\end{pmatrix}$，有总角动量

$$\vec{J}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma}&0\\0&\vec{\sigma}\end{pmatrix}-i\vec{r}\times\vec{\nabla}=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}+\vec{L}$$

说明总的角动量$\vec{J}$包含轨道角动量$\vec{L}$和自旋角动量$\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$。

4)空间反演不变性（P 变换）

对于突变，例如宇称变换

$$x' = \Lambda x, \qquad \Lambda = \text{diag}(1,-1,-1,-1) = \Lambda^{-1}$$

如果取

$$S = \gamma_0$$

则由 $\gamma_0\gamma_0 = 1$ 和 $\gamma_0\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\gamma_0 = 0$， Λ 和 S 满足

$$S\gamma^\mu S^{-1} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu,$$

说明 Dirac 方程是空间反演不变的。

5)时间反演不变性（T 变换）

对于时间反演变换

$$x' = \Lambda x, \qquad \Lambda = \text{diag}(-1,1,1,1) = \Lambda^{-1}$$

如果取

$$S = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

因为

$$\begin{aligned} SS &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_2\gamma_3 \\ &= \gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_1\gamma_2\gamma_2\gamma_3\gamma_3 = I \end{aligned}$$

故

$$S^{-1} = S\ ,$$

$$\begin{aligned} S\gamma^\mu S^{-1} &= S\gamma^\mu S = S\gamma^\mu\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \Lambda^\mu{}_\nu S\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu SS\gamma^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \end{aligned}$$

说明 Dirac 方程是时间反演不变的。

6)Dirac 标量

物理上可观测的量应该是由 Dirac 旋量$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \psi_3(x)\\ \psi_4(x)\end{pmatrix}$和$\bar{\psi}(x)=\psi^+(x)\gamma_0$ $=\left(\psi_1^*(x)\gamma_0 \quad \psi_2^*(x)\gamma_0 \quad \psi_3^*(x)\gamma_0 \quad \psi_4^*(x)\gamma_0\right)$构成的Dirac标量$\bar{\psi}\,\Gamma\psi$，$\Gamma$是Dirac 空间的 4X4 矩阵。它们在无穷小 Lorentz 变换$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}=g^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}$和$S=I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$时的性质如何？

由

$$\psi'(x')=S\psi(x),\quad \psi'^+(x')=\psi^+(x)S^+$$

右乘γ_0，有

$$\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)\gamma_0 S^+\gamma_0\text{。}$$

由

$$S^+=I+\frac{i}{4}\sigma^+_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},$$

$$\sigma^+_{\mu\nu}=-\frac{i}{2}\left(\gamma^+_{\nu}\gamma^+_{\mu}-\gamma^+_{\mu}\gamma^+_{\nu}\right),$$

$$\gamma_0\gamma^+_{\mu}\gamma_0=\gamma_{\mu},$$

有

$$\gamma_0\sigma^+_{\mu\nu}\gamma_0=\sigma_{\mu\nu}$$

$$\gamma_0 S^+\gamma_0=\gamma_0\left(I+\frac{i}{4}\sigma^+_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)\gamma_0=I+\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}=S^{-1},$$

故

$$\bar{\psi}'(x')=\bar{\psi}(x)S^{-1}\text{。}$$

独立的 4X4 的矩阵Γ有 16 个，例如

$$
\Gamma = \begin{cases} I & （1个） \\ \gamma_\mu & （4个） \\ \sigma_{\mu\nu} & （6个） \\ \gamma_5 & （1个） \\ \gamma_5\gamma_\mu & （4个） \end{cases}
$$

其中γ_5的定义是

$$
\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad ,
$$

容易证明

$$
\{\gamma_5，\ \gamma_\mu\} = 0, \qquad \gamma_5^2 = I, \qquad S^{-1}\gamma_5 S = \gamma_5 \quad 。
$$

利用Γ的变换性质，

$$
\begin{aligned}
&S^{-1} I S = I \\
&S^{-1}\gamma_\mu S = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma_\nu \\
&S^{-1}\sigma_{\mu\nu} S = \Lambda_\mu{}^\sigma \Lambda_\nu{}^\rho \sigma_{\sigma\rho} \\
&S^{-1}\gamma_5 S = \gamma_5 \\
&S^{-1}\gamma_5\gamma_\mu S = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma_5\gamma_\nu
\end{aligned}
$$

容易证明 16 个独立的 Dirac 标量的 Lorentz 变换性质是

$$
\begin{aligned}
&\bar\psi'(x')\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar\psi(x)\psi(x)，\text{标量}， \\
&\bar\psi'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma^\nu\psi(x)，\text{矢量}， \\
&\bar\psi'(x')\gamma^5\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}\gamma^5 S\psi(x) = \bar\psi(x)\gamma^5\psi(x)，\text{赝标量}， \\
&\bar\psi'(x')\gamma^5\gamma^\mu\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}\gamma^5 S S^{-1}\gamma^\mu S\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\bar\psi(x)\gamma^5\gamma^\nu\psi(x)，\text{赝矢量}， \\
&\bar\psi'(x')\sigma^{\mu\nu}\psi'(x') = \bar\psi(x)S^{-1}\sigma^{\mu\nu}S\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma\bar\psi(x)\sigma^{\rho\sigma}\psi(x)，\text{张量}。
\end{aligned}
$$